Aproksimacija funkcij

Uvod

- Aproksimacija je postopek, ki neki izbrani funkciji priredi posebno, ki je "blizu" izbrani.
- Izbrana funkcija je ponavadi vsaj zvezna.
- Posebna funkcija je pogosto polinom.
- Opredeliti moramo pojem "biti blizu".

Normirani prostori funkcij

- Naj bo $\mathcal{X}$ vektorski prostor funkcij.
- Na $\mathcal{X}$ definiramo normo $\|\cdot\| : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$, z lastnostmi ($f, g \in \mathcal{X}$, $\alpha \in \mathbb{R}$):
  1. $\|f\| = 0$ natanko tedaj, ko je $f \equiv 0$ (za prostore, kjer funkcije niso vsaj zvezne, zahtevamo, da je $f \equiv 0$ skoraj povsod).
  2. $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$.
  3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Primer

Naj bo $\mathcal{X} = \mathcal{C}([a, b])$ in $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$ dana s predpisom

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Normi $\|\cdot\|_\infty$ rečemo neskončna ali supremum (maksimum) norma.

- S pomočjo norme definiramo razdaljo med dvema funcijama $f, g \in \mathcal{X}$:
$$\operatorname{dist}(f, g) = \|f - g\|.$$
- Tedaj lahko rečemo, da sta funkciji blizu glede na normo $\|\cdot\|$, če je razdalja med njima majhna.
- Podobno definiramo razdaljo funkcije $f \in \mathcal{X}$ do nekega (pod)prostora $\mathcal{P}$:
$$\operatorname{dist}(f, \mathcal{P}) = \inf_{p \in \mathcal{P}} \|f - p\|.$$
- Če je
$$\operatorname{dist}(f, \mathcal{P}) = \inf_{p \in \mathcal{P}} \|f - p\| = \|f - p^*\|,$$
je p^* element najboljše aproksimacije glede na normo $\|\cdot\|$.

Definicija

Polinom $B_{n,i}$, definiran kot

$$B_{n,i}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad i \in 0, 1, \ldots, n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0,1],$$

je i-ti Bernsteinov polinom stopnje n.

- Bernsteinovi polinomi imajo nekaj lepih lastnosti:
  1. So baza prostora polinomov stopnje $\leq n$ in tvorijo particijo enote

     $$\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(x) \equiv 1, \quad x \in [0,1].$$

  2. $$\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} B_{n,i}(x) = x, \quad \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 B_{n,i}(x) = x^2 + \frac{1}{n} x (1-x).$$

Weierstrassov izrek

- Za prostor zveznih funkcij in njegov podprostor polinomskih funkcij, lahko (konstruktivno dokažemo pomemben Weierstrassov izrek.

Izrek

Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$ poljubna zvezna funkcija in $\mathcal{P}_n$ prostor polinomov stopnje $\leq n$. Potem je

$$\mathrm{dist}_\infty(f, \mathcal{P}_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

- Izrek dokažemo konstruktivno!
- Lahko se omejimo na $[a,b] = [0,1]$.
- Polinome iz $\mathcal{P}_n$ definiramo kot

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) B_{n,i}(x).$$