

Dobra aproksimacija krožnih lokov s kubičnimi G^2 zveznimi Bézierovimi krivuljami^a

Emil Žagar

Seminar za numerično analizo

Ljubljana, 16.2.2005

^aPovzeto po članku: T. Dokken, M. Dæhlen, T. Lyche and K. Mørken, *Good approximation of circles by curvature-continuous Bézier curves*, *Comp. Aided Geom. Design* 7 (1990), 33–41.

Vsebina

- Uvod
- G^2 zvezne Bézierove krivulje
- Aproksimacija krožnih lokov
- Enostranski Hermiteov interpolant
- Izboljšana metoda
- Hermiteov interpolant z oscilirajočo napako
- Zaključek

Uvod

Aproksimirati želimo krožnico (ali vsaj njen segment) z odsekoma polinomske krivulje.

Uvod

Aproksimirati želimo krožnico (ali vsaj njen segment) z odsekoma polinomske krivulje.

Problem je zanimiv predvsem v CAGD, CAD, CAM, . . . , ko želimo imeti zapis pomembnejših analitičnih objektov v odsekoma polinomske obliki.

Uvod

Aproksimirati želimo krožnico (ali vsaj njen segment) z odsekoma polinomske krivulje.

Problem je zanimiv predvsem v CAGD, CAD, CAM, . . . , ko želimo imeti zapis pomembnejših analitičnih objektov v odsekoma polinomski obliki.

Vztrajamo na polinomski aproksimaciji, saj bi sicer krožne odseke točno predstavili z racionalnimi Bézierovimi krivuljami tipa

$$\mathbf{r}(t) = \frac{B_0(t)\mathbf{p}_0 + w B_1(t)\mathbf{p}_1 + B_2(t)\mathbf{p}_2}{B_0(t) + w B_1(t) + B_2(t)},$$
$$B_i(t) = \binom{2}{i} (1-t)^{2-i} t^i, \quad i = 0, 1, 2, \quad w < 1.$$

Torej aproksimiramo s parametrično polinomske kubične krivulje $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))^T$.

Mera za napako bo funkcija

$$\psi(t) = |x(t)^2 + y(t)^2 - 1|.$$

Mera za napako bo funkcija

$$\psi(t) = |x(t)^2 + y(t)^2 - 1|.$$

Da bi se izognili degenerirani rešitvi

$$\mathbf{p}(t) = (\cos a, \sin a)^T, \quad a \in \mathbb{R},$$

bomo zahtevali interpolacijo vrednosti funkcije in smeri tangente v robnih točkah.

G^2 zvezne kubične Bézierove krivulje

Vsak kubični polinomski del krivulje bo v Bézierovi obliki

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{P}_i \binom{3}{i} (1-t)^{3-i} t^i, \quad t \in [0, 1],$$

kjer so $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^2$ kontrolne točke.

G^2 zvezne kubične Bézierove krivulje

Vsak kubični polinomske del krivulje bo v Bézierovi obliki

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{P}_i \binom{3}{i} (1-t)^{3-i} t^i, \quad t \in [0, 1],$$

kjer so $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^2$ kontrolne točke.

Krivulji $\mathbf{p} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ in $\mathbf{q} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sta G^2 zvezni v točki $\mathbf{p}(b) = \mathbf{q}(c)$, če je

$$\mathbf{p}'(b) = \beta_1 \mathbf{q}'(c) \quad \text{in} \quad \mathbf{p}''(b) = \beta_1^2 \mathbf{q}''(c) + \beta_2 \mathbf{q}'(c), \quad \beta_1 > 0.$$

Za krivulje v Bézierovi obliki lahko te pogoje prenesemo na kontrolne točke.

Naj bosta \mathbf{p} in \mathbf{q} dve Bézierovi kubični krivulji

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^3 P_i \binom{3}{i} (1-t)^{3-i} t^i,$$

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=0}^3 Q_i \binom{3}{i} (1-t)^{3-i} t^i.$$

Naj bosta \mathbf{p} in \mathbf{q} dve Bézierovi kubični krivulji

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^3 P_i \binom{3}{i} (1-t)^{3-i} t^i,$$

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=0}^3 Q_i \binom{3}{i} (1-t)^{3-i} t^i.$$

Pogoj G^2 zveznosti se ob privzetku $\beta_1 = 1$ glasi

$$P_3 = Q_0, \quad P_3 - P_2 = Q_1 - Q_0, \quad P_2 - Q_1 = \widetilde{\beta}_2(P_1 - Q_2).$$

Še več, ob zgornjem privzetku sta krivulji celo C^1 zvezni v točki $\mathbf{p}(1) = \mathbf{q}(0)$.

Naj bosta \mathbf{p} in \mathbf{q} dve Bézierovi kubični krivulji

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^3 P_i \binom{3}{i} (1-t)^{3-i} t^i,$$

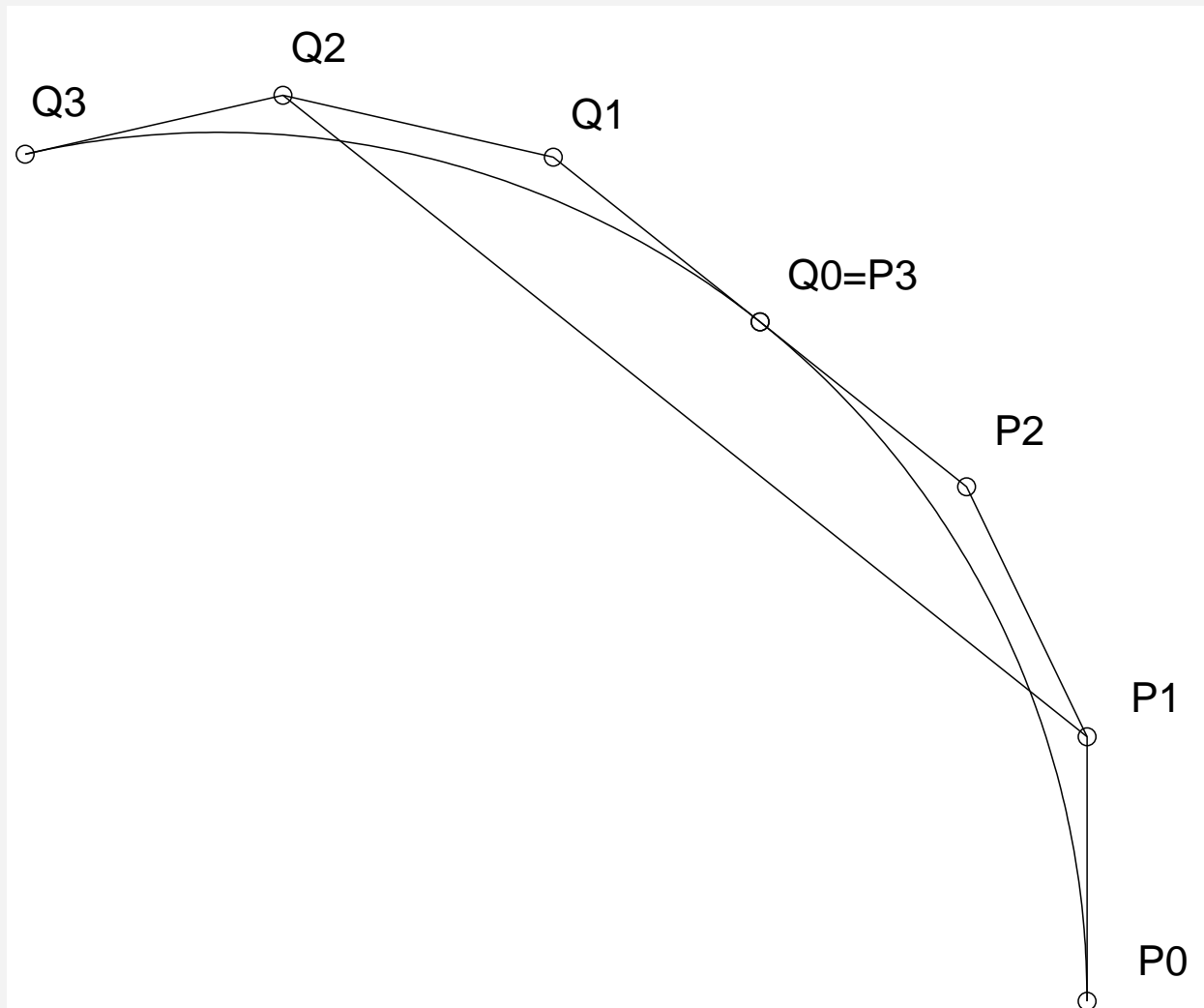
$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=0}^3 Q_i \binom{3}{i} (1-t)^{3-i} t^i.$$

Pogoj G^2 zveznosti se ob privzetku $\beta_1 = 1$ glasi

$$P_3 = Q_0, \quad P_3 - P_2 = Q_1 - Q_0, \quad P_2 - Q_1 = \widetilde{\beta}_2(P_1 - Q_2).$$

Še več, ob zgornjem privzetku sta krivulji celo C^1 zvezni v točki $\mathbf{p}(1) = \mathbf{q}(0)$.

Graf dveh G^2 zveznih kubičnih Bézierovih krivulj si lahko ogledamo na naslednji sliki.



Aproksimacija krožnih lokov

Lahko predpostavimo, da aproksimiramo krožni lok oblike

$$\mathbf{f}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, \alpha], \quad \alpha \in [0, 2\pi].$$

Interpoliramo vrednosti $\mathbf{f}(0)$, $\mathbf{f}(\alpha)$ ter smeri odvodov $\mathbf{f}'(0)$, $\mathbf{f}'(\alpha)$.

Aproksimacija krožnih lokov

Lahko predpostavimo, da aproksimiramo krožni lok oblike

$$\mathbf{f}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, \alpha], \quad \alpha \in [0, 2\pi].$$

Interpoliramo vrednosti $\mathbf{f}(0)$, $\mathbf{f}(\alpha)$ ter smeri odvodov $\mathbf{f}'(0)$, $\mathbf{f}'(\alpha)$.

Ključnega pomena je pravi izbor Bézierove krivulje

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} - L \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Pri tem je $L = \|P_1 - P_0\| = \|P_3 - P_2\|$.

Pri tem je $L = \|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0\| = \|\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2\|$.

Hitro se vidi, da je

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(0) &= \mathbf{f}(0), & \mathbf{p}'(0) &= 3L\mathbf{f}'(0), \\ \mathbf{p}(1) &= \mathbf{f}(\alpha), & \mathbf{p}'(1) &= 3L\mathbf{f}'(\alpha). \end{aligned}$$

Torej smo dobili **enoparametrično družino Bézierovih krivulj**, ki zadoščajo Hermiteovim interpolacijskim pogojem.

Pri tem je $L = \|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0\| = \|\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2\|$.

Hitro se vidi, da je

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(0) &= \mathbf{f}(0), & \mathbf{p}'(0) &= 3L\mathbf{f}'(0), \\ \mathbf{p}(1) &= \mathbf{f}(\alpha), & \mathbf{p}'(1) &= 3L\mathbf{f}'(\alpha). \end{aligned}$$

Torej smo dobili **enoparametrično družino Bézierovih krivulj**, ki zadoščajo Hermiteovim interpolacijskim pogojem.

Želimo zmanjšati “napako”

$$\psi(t) = |\phi(t)| = |x(t)^2 + y(t)^2 - 1|.$$

Pri tem je $L = \|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0\| = \|\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2\|$.

Hitro se vidi, da je

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(0) &= \mathbf{f}(0), & \mathbf{p}'(0) &= 3L\mathbf{f}'(0), \\ \mathbf{p}(1) &= \mathbf{f}(\alpha), & \mathbf{p}'(1) &= 3L\mathbf{f}'(\alpha). \end{aligned}$$

Torej smo dobili **enoparametrično družino Bézierovih krivulj**, ki zadoščajo Hermiteovim interpolacijskim pogojem.

Želimo zmanjšati “napako”

$$\psi(t) = |\phi(t)| = |x(t)^2 + y(t)^2 - 1|.$$

Toda, če je $\psi(t)$ **majhno** število, je tudi $|e(t)| = \left| \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - 1 \right|$ **majhno**.

Namreč

$$\psi(t) = \left| \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - 1 \right| \left(\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} + 1 \right) \approx 2|e(t)|.$$

Zato lahko na vse od funkcij ψ , ϕ in e gledamo kot na napako.

Namreč

$$\psi(t) = \left| \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - 1 \right| \left(\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} + 1 \right) \approx 2|e(t)|.$$

Zato lahko na vse od funkcij ψ , ϕ in e gledamo kot na napako.

Iz teorije najboljše enakomerne aproksimacije sklepamo, da je smiselno L izbrati tako, da bo

$$\phi(t) = x(t)^2 + y(t)^2 - 1$$

oscilirala.

Namreč

$$\psi(t) = \left| \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - 1 \right| \left(\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} + 1 \right) \approx 2|e(t)|.$$

Zato lahko na vse od funkcij ψ , ϕ in e gledamo kot na napako.

Iz teorije najboljše enakomerne aproksimacije sklepamo, da je smiselno L izbrati tako, da bo

$$\phi(t) = x(t)^2 + y(t)^2 - 1$$

oscilirala.

Komponenti x in y lahko zapišemo kot

$$x(t) = (1 - t)^3 + 3(1 - t)^2t + 3(\cos \alpha + L \sin \alpha)(1 - t)t^2 + t^3 \cos \alpha,$$

$$y(t) = 3L(1 - t)^2t + 3(\sin \alpha - L \cos \alpha)(1 - t)t^2 + t^3 \sin \alpha.$$

Iz česar dobimo

$$\phi(t) = 15a(1-t)^4t^2 + 20b(1-t)^3t^3 + 15a(1-t)^2t^4,$$

kjer je

$$a = \frac{1}{5} (3L^2 + 2L \sin \alpha - 2(1 - \cos \alpha)),$$

$$b = \frac{1}{10} (-9L^2 \cos \alpha + 18L \sin \alpha - 10(1 - \cos \alpha)).$$

Iz česar dobimo

$$\phi(t) = 15a(1-t)^4t^2 + 20b(1-t)^3t^3 + 15a(1-t)^2t^4,$$

kjer je

$$a = \frac{1}{5} (3L^2 + 2L \sin \alpha - 2(1 - \cos \alpha)),$$

$$b = \frac{1}{10} (-9L^2 \cos \alpha + 18L \sin \alpha - 10(1 - \cos \alpha)).$$

Torej je ϕ Bézierova krivulja stopnje 6 s kontrolnimi točkami $(0, 0, a, b, a, 0, 0)$.

Zaradi simetričnosti kontrolnega poligona je $\phi(\frac{1}{2} - t) = \psi(\frac{1}{2} + t)$, $t \in [0, 1/2]$. Torej ima ϕ lokalni ekstrem pri $t = 1/2$.

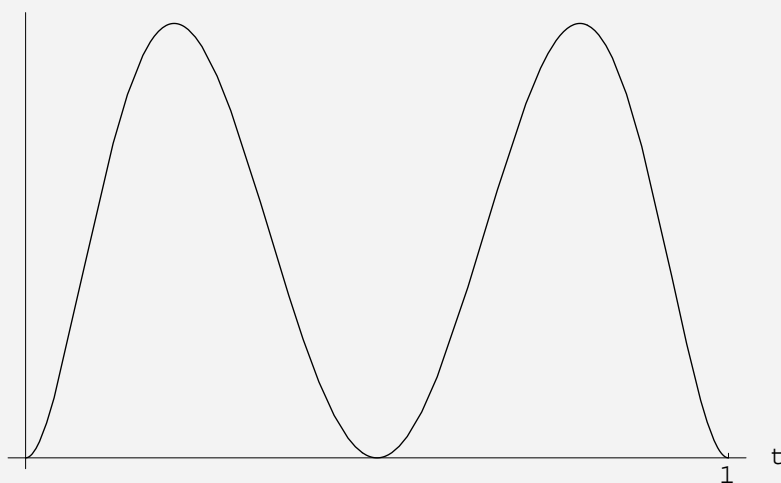
Enostranski Hermiteov intepolant

Pri tej metodi je ideja **predpisati** $\phi(1/2) = 0$, torej vrednost lokalnega ekstrema potisniti v 0.

Enostranski Hermiteov intepolant

Pri tej metodi je ideja **predpisati** $\phi(1/2) = 0$, torej vrednost lokalnega ekstrema potisniti v 0.

Izkaže se, da je $\phi(t) := \phi_1(t) \geq 0$, $t \in [0, 1]$ (glejte sliko 1).



Slika 1: Graf napake ϕ_1 .

Pri tako izbranemu L imamo torej **enostranski Hermiteov interpolant**.

Izrek 1 *Bézierova krivulja $\mathbf{p}_1 = (x_1(t), y_1(t))^T$, ki jo dobimo tako, da predpišemo*

$$L_1 := L = \frac{4}{3} \tan \frac{1}{4} \alpha$$

interpolira segment krožnice v $\mathbf{P}_0 = (0, 1)$, $\mathbf{P}^ = (\cos \frac{1}{2} \alpha, \sin \frac{1}{2} \alpha)$ in $\mathbf{P}_3 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ in je vseskozi zunaj kroga. Napaka pri interpolaciji je*

$$\epsilon_1(\alpha) = \max_{t \in [0,1]} \{x_1(t)^2 + y_1(t)^2 - 1\} = \frac{4}{27} \frac{\sin^6 \frac{1}{4} \alpha}{\cos^2 \frac{1}{4} \alpha}.$$

Pri tako izbranemu L imamo torej **enostranski Hermiteov interpolant**.

Izrek 1 *Bézierova krivulja $\mathbf{p}_1 = (x_1(t), y_1(t))^T$, ki jo dobimo tako, da predpišemo*

$$L_1 := L = \frac{4}{3} \tan \frac{1}{4} \alpha$$

interpolira segment krožnice v $\mathbf{P}_0 = (0, 1)$, $\mathbf{P}^ = (\cos \frac{1}{2} \alpha, \sin \frac{1}{2} \alpha)$ in $\mathbf{P}_3 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ in je vseskozi zunaj kroga. Napaka pri interpolaciji je*

$$\epsilon_1(\alpha) = \max_{t \in [0, 1]} \{x_1(t)^2 + y_1(t)^2 - 1\} = \frac{4}{27} \frac{\sin^6 \frac{1}{4} \alpha}{\cos^2 \frac{1}{4} \alpha}.$$

Ker za **majhne α** velja **$\sin \alpha \approx \alpha$** in **$\cos \alpha \approx 1$** , je **red** aproksimacije očitno **6**.

Vendar v primeru **$\alpha \rightarrow 2\pi$** napaka raste neomejeno.

Izboljšana metoda

Ker je interpolant iz prejšnje metode **vedno zunaj kroga**, je naslednja ideja na dlani:

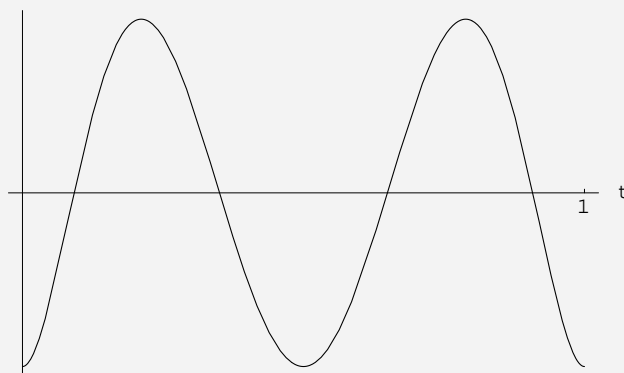
“potegniti” interpolant rahlo proti središču kroga!

Izboljšana metoda

Ker je interpolant iz prejšnje metode **vedno zunaj kroga**, je naslednja ideja na dlani:

“potegniti” interpolant rahlo proti središču kroga!

S tem **zmanjšamo napako**, a izgubimo interpolacijo robnih vrednosti (glejte sliko 2).



Slika 2: Graf napake ϕ_2 .

Skaliranje Bézierove krivulje je potrebno izvesti le na kontrolnih točkah, zato lahko zapišemo naslednji izrek.

Izrek 2 Naj bo $\mathbf{p}_2(t) = (x_2(t), y_2(t))^T = (\rho x_1(t), \rho y_1(t))^T$ Bézierova krivulja, ki jo *dobimo s skaliranjem Bézierove krivulje \mathbf{p}_1 s faktorjem*

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{2 + \epsilon_1(\alpha)}}.$$

Napaka $\epsilon_2(\alpha)$ pri tej aproksimaciji je

$$\epsilon_2(\alpha) = \max_{t \in [0,1]} \{x_2(t)^2 + y_2(t)^2 - 1\} = \frac{2 \sin^6 \frac{1}{4}\alpha}{27 \cos^2 \frac{1}{4}\alpha + 2 \sin^6 \frac{1}{4}\alpha}.$$

Hermiteov interpolant z oscilirajočo napako

V prejšnji metodi smo izgubili interpolacijo robnih vrednosti.

Če pri njej vztrajamo, se zdi smiselno določiti tak interpolant, pri katerem bo napaka oscilirala okrog 0. Ta ideja je jedro tretje metode!

Hermiteov interpolant z oscilirajočo napako

V prejšnji metodi smo izgubili interpolacijo robnih vrednosti.

Če pri njej vztrajamo, se zdi smiselno določiti tak interpolant, pri katerem bo napaka oscilirala okrog 0. Ta ideja je jedro tretje metode!

Najprej uvedemo družino funkcij

$$h(t) = 15(1-t)^4t^2 + 20K(1-t)^3t^3 + 15(1-t)^2t^4.$$

Če je $K = b/a$, je $\phi(t) = ah(t)$.

Pri prejšnjih dveh metodah smo npr. vzeli $K = -3/2$.

Lema 1 Če je konstanta K enaka

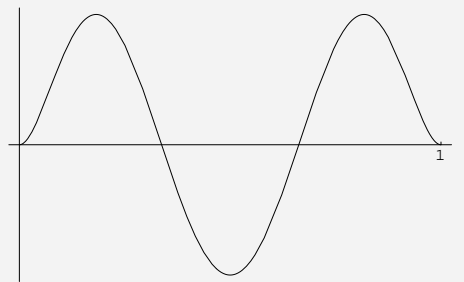
$$K_3 := \frac{1}{2} - \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} \approx -1.8553,$$

funkcija h trikrat oscilira z enakimi odkloni na $[0, 1]$.

Izrek 3 Pri Bézierovi krivulji $\mathbf{p}_3 = (x(t), y(t))^T$, ki jo dobimo tako, da postavimo L , torej dolžino vektorjev $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0$ in $\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2$ na

$$L_3 := L = \left\{ (9 - 2K_3) \sin \alpha - \sqrt{((9 - 2K_3) \sin \alpha)^2 - 6(2K_3 + 3 \cos \alpha)(5 - 2K_3)(1 - \cos \alpha)} \right\} \times \{3(2K_3 + 3 \cos \alpha)\}^{-1},$$

funkcija “napake” $x_3(t)^2 + y_3(t)^2 - 1$ oscilira trikrat z enakimi odkloni na $[0, 1]$.



Slika 3: Graf napake ϕ_3 za $\alpha = \pi/4$ in $L = L_3$.

Zaključek

Za zaključek si oglejmo le tabelo napak pri posameznih metodah. Vsakič je računana **radialna napaka**, t.j., $\max_t |e(t)|$. Z E_1 smo označili napako pri **skaliranem enostranskem aproksimantu**, z E_2 pri **oscilirajočem interpolantu**, z E_3 pa napako pri **splošni G^2 zvezni interpolacijski shemi** (de Boor, Höllig in Sabin 1987). Aproksimirali smo segment krožnice z dolžino $\alpha = 2\pi/n$.

Zaključek

Za zaključek si oglejmo le tabelo napak pri posameznih metodah. Vsakič je računana **radialna napaka**, t.j., $\max_t |e(t)|$. Z E_1 smo označili napako pri **skaliranem enostranskem aproksimantu**, z E_2 pri **oscilirajočem interpolantu**, z E_3 pa napako pri **splošni G^2 zvezni interpolacijski shemi** (de Boor, Höllig in Sabin 1987). Aproksimirali smo segment krožnice z dolžino $\alpha = 2\pi/n$.

n	E_1	E_2	E_3
4	$0.14e - 3$	$0.19e - 3$	$0.14e - 2$
8	$0.21e - 5$	$0.30e - 5$	$0.21e - 4$
16	$0.33e - 7$	$0.47e - 7$	$0.32e - 6$
32	$0.52e - 9$	$0.74e - 9$	$0.49e - 8$