

# Interpolacija s parametričnimi polinomskimi krivuljami <sup>1</sup>

Emil Žagar

22. november 2010

<sup>1</sup>Skripta je v nastajanju, zato je gotovo polna napak. Hvaležen bom za vse pripombe. Iskanje napak je obenem del učnega procesa pri tem predmetu.

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
1.1	Točke in vektorji . . . . .	3
1.2	Afine preslikave . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Krivulje</b>	<b>6</b>
2.1	Parametrične krivulje . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Bézierove krivulje</b>	<b>9</b>
3.1	de Casteljaouov algoritem . . . . .	9
3.2	Razcvetna oblika Bézierove krivulje . . . . .	10
3.3	Bernsteinova oblika Bézierove krivulje . . . . .	12
3.4	Subdivizija . . . . .	16
3.5	Višanje in nižanje stopnje . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Zlepki Bézierovih krivulj</b>	<b>19</b>
4.1	Definicija, lokalnost in globalnost . . . . .	19
4.2	Pogoji gladkosti . . . . .	21
4.3	Kvadratični Bézierovi B-zlepki . . . . .	23
4.4	Interpolacija z Bézierovimi zlepkami . . . . .	24
4.5	$C^1$ zvezni kubični zlepki . . . . .	24
4.6	$C^2$ zvezni kubični zlepki . . . . .	27
4.7	Izbira delilnih točk . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Geometrijsko zvezne krivulje</b>	<b>35</b>
5.1	Definicija geometrijske zveznosti . . . . .	36
5.2	$G$ zveznost ravninskih Bézierovih krivulj . . . . .	40
5.3	$\nu$ -zlepki . . . . .	41
5.4	Kubični Hermiteovi $G^1$ zvezni zlepki . . . . .	43
5.4.1	Minimizacija prožnostne energije . . . . .	44

---

<b>6</b>	<b>Geometrijska interpolacija</b>	<b>48</b>
6.1	Osnovni pojmi geometrijske interpolacije . . . . .	48
6.2	Geometrijska interpolacija s parabolami . . . . .	50
6.2.1	Hermiteov primer . . . . .	50
6.2.2	Lagrangeov primer . . . . .	52
6.3	Kubična geometrijska interpolacija v $\mathbb{E}^3$ . . . . .	54
6.4	Asimptotična analiza . . . . .	59
6.4.1	Asimptotični red aproksimacije . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Krivulje s pitagorejskim hodografom</b>	<b>67</b>
7.1	Ravninske PH krivulje . . . . .	67
7.2	Kontrolne točke Bézierovih PH krivulj . . . . .	69
7.3	Kompleksna reprezentacija PH krivulj . . . . .	72
<b>8</b>	<b>Dodatek A</b>	<b>75</b>
8.1	Rezultante . . . . .	75

# Poglavje 1

## Uvod

### 1.1 Točke in vektorji

Večina naše obravnave bo vezana na metode, ki so neodvisne od koordinatnega sistema. Zanimale nas bodo torej predvsem lastnosti objektov in ne njihova povezava z izbranim koordinatnim sistemom (denimo dejstvo, da točka leži na sredini povezave med dvema drugima točkama, da je točka vrh kota, ...). Slednji seveda postane nepogrešljiv, ko želimo metodo implementirati, saj se moramo tedaj odločiti za konkretno izbiro koordinat.

Koncept, ki temelji na neodvisnosti od koordinatnega sistema, zahteva natančno ločevanje med točkami, elementi  $d$ -dimenzionalnega evklidskega prostora  $\mathbb{E}^d$ , in vektorji, elementi  $d$ -dimenzionalnega vektorskega prostora  $\mathbb{R}^d$ . Ponavadi točke in vektorje karakteriziramo z  $d$  koordinatami, vendar moramo (ne samo formalno) poudariti bistveno razliko med njimi.

Naj bosta  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^d$  točki, potem obstaja enolično določen vektor  $\mathbf{v}$ , ki kaže od  $\mathbf{a}$  do  $\mathbf{b}$  (v besedilu bomo tako točke, kot vektorje označevali z malimi odebeljenimi črkami; če bo le mogoče, se bomo držali pravila, da točke označujemo s črkami z začetka abecede). Določimo ga z odštevanjem komponent točk, torej

$$\mathbf{v} := \mathbf{b} - \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^d, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d.$$

Obratno za vsak vektor  $\mathbf{v}$  obstaja neskončno parov točk  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$ , za ktere je  $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ . Od tod hitro opazimo, da lahko elemente evklidskega prostora  $\mathbb{E}^d$  le odštevamo (tvorimo vektorje), ne moremo pa jih seštevati. Medtem ko vektorje lahko tako seštevamo, kot odštevamo.

Kljub temu pa lahko koncept seštevanja uvedemo tudi nad točkami.

DEFINICIJA 1.1.1 Naj bodo  $\mathbf{a}_j \in \mathbb{E}^d$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , in  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , taka realna števila, da je  $\sum_{j=0}^n \alpha_j = 1$ . Potem vsoti

$$\mathbf{b} = \sum_{j=0}^n \alpha_j \mathbf{a}_j$$

pravimo baricentrična kombinacija točk  $\mathbf{b}_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Opazimo, da je tako seštevanje dobro definirano, saj je

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_0),$$

kar je vsota točke in vektorja. Morda najbolj znan primer baricentrične kombinacije točk je *težišče*

$$\mathbf{g} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{n+1} \mathbf{b}_j.$$

Poseben primer baricentrične kombinacije točk je *konveksna kombinacija* točk, kjer za koeficiente  $\alpha_j$  zahtevamo da so nenegativni.

Ogledali smo si torej način, kako iz točk s seštevanjem tvorimo nove točke. Poglejmo sedaj, kako iz množice točk tvorimo vektor. Zapišimo kar

$$\mathbf{v} = \sum_{j=0}^n \beta_j \mathbf{b}_j, \quad \mathbf{b}_j \in \mathbb{E}^d, \beta_j \in \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Če hočemo, da bo  $\mathbf{v}$  vektor, mora veljati  $\sum_{j=0}^n \beta_j = 0$ . Bralcu prepuščamo, da sam preveri zadnjo ugotovitev.

Morda je na prvi pogled prepletanje koncepta točke in vektorja nenavadno. Pri izpeljavi mnogih algoritmov pa bo neprecenljive praktične in toretične vrednosti. Samo en primer. Denimo, da želimo pri izpeljavi formul hitro preveriti kakšen tip objekta smo dobili. Če se koeficienti pri točkah ne seštejejo v 0 ali 1, smo gotovo naredili napako, saj dobljeni objekt ni niti vektor, niti točka. Več o formalnem preverjanju tipov v grafičnih okoljih najdete v [13].

## 1.2 Afine preslikave

Večina transformacij, ki jih v CAGD uporabljamo za premike ali skaliranje objektov, so *afine preslikave*. Kot smo videli, je osnovna operacija na točkah baricentrična kombinacija. Zato bomo definicijo afine preslikave naslonili nanjo.

DEFINICIJA 1.2.1 Preslikava  $\Phi : \mathbb{E}^d \rightarrow \mathbb{E}^d$  je afina, če ohranja baricentrične kombinacije. Natančneje, naj bo

$$\mathbf{a} = \sum_{j=0}^n \alpha_j \mathbf{a}_j, \quad \sum_{j=0}^n \alpha_j = 1,$$

potem je

$$\Phi \mathbf{a} = \sum_{j=0}^n \alpha_j \Phi \mathbf{a}_j.$$

Tako na primer afina preslikava preslika središče daljice med dvema točkama v središče daljice med slikama točk, ali pa težišče množice točk v težišče preslikanih točk.

Če izberemo koordinatni sistem (s tem izberemo izhodišče  $\mathbf{0}$ ), potem lahko točko  $\mathbf{a}$  enačimo z  $d$ -dimenzionalnim vektorjem, ki ima enake koordinate kot  $\mathbf{a}$ . Tedaj se vsaka afina preslikava  $\Phi$  izraža kot  $\Phi \mathbf{a} = A\mathbf{a} + \mathbf{v}$ , kjer je  $A$  matrika dimenzije  $d \times d$  in  $\mathbf{v}$  vektor iz  $\mathbb{R}^d$ .

Najbolj znani primeri afinih preslikav so

- **Identiteta:**  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  in  $A = I$ , identiteta.
- **Translacija:**  $\mathbf{v}$  poljuben in  $A = I$ .
- **Skaliranje:**  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  in  $A$  diagonalna matrika.
- **Rotacija:**  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  in  $A$  ortogonalna matrika.
- **Strig:**  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,  $A$  pa trikotna matrika z identitetami kot diagonalnimi bloki.

# Poglavje 2

## Krivulje

Osnovni objekti v CAGD so seveda točke in vektorji. Toda ti zaživijo šele, ko jih konstruiramo s pomočjo naprednejših objektov. Najpreprostejši tak objekt so krivulje v večdimenzionalnem prostoru  $\mathbb{E}^d$ . To so množice točk, ki jih navadno dobimo kot sliko (gladke) preslikave nekega zaprtega intervala. Taki preslikava pogosto rečemo *parametrizacija krivulje*.

### 2.1 Parametrične krivulje

Formalno parametrično krivuljo definiramo takole.

DEFINICIJA 2.1.1 *Preslikavi*

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_d)^T : I \rightarrow \mathbb{E}^d, \quad I \subseteq \mathbb{R},$$

rečemo *parametrizacija krivulje*  $\mathbf{p}(I)$ , ali na kratko kar *parametrizacija krivulje*  $\mathbf{p}$ . Krivulja je gladka, če je preslikava  $\mathbf{p}$  gladka na  $I$ .

Posebej nas bodo zanimale take krivulje, katerih komponente parametrizacije so polinomi stopnje  $\leq n$ . Ne spregljete, da je krivulja le slika preslikave  $\mathbf{p}$ , torej množica  $\mathbf{p}(I)$ . Toda v praksi nas pravzaprav zanimajo samo parametrizacije krivulje  $\mathbf{p}$ , saj lahko samo preko teh zares pridemo do krivulj, ki jih želimo uporabljati (risati, voditi po njih robote, slediti s kamerami, ...). Velikokrat nas zanimajo samo *regularne* krivulje. To so take, za katere je odvod  $\mathbf{p}'(t) = (p'_1(t), p'_2(t), \dots, p'_d(t))^T \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$  za vsak  $t \in I$ . Pri tem smo s  $\mathbf{p}'(t)$  označili vektor odvoda na krivuljo pri  $t$ . Domeno parametrizacije želimo pogosto spremeniti. Pravimo, da krivuljo (regularno) reparametriziramo.

DEFINICIJA 2.1.2 *Reparametrizacija krivulje*  $\mathbf{p}$  je preslikava  $\mathbf{q} = \mathbf{p} \circ \varphi$ , kjer je  $\varphi : J \rightarrow I$ ,  $J \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\varphi'(u) > 0$  za  $u \in J$  in  $\varphi(J) = I$ .

Pri nalogah geometrijskega modeliranja nemalokrat želimo, da se pomembnejše karakteristike krivulje ne spremenijo z reparametrizacijo. Vsekakor naj bi to veljalo za krivuljo samo. Očitno se krivulja (kot množica točk v sliki izbrane parametrizacije) z reparametrizacijo ne spremeni. Ža za njen odvod v izbrani točki to ni več res. Naj bo namreč  $\mathbf{a} = \mathbf{p}(t)$ . Tedaj je tangenta na krivuljo  $\mathbf{p}$  v točki  $\mathbf{a}$  enaka  $\mathbf{p}'(t)$ , medtem ko je tangenta na reparametrizirano krivuljo  $\mathbf{q} = \mathbf{p} \circ \varphi$  v točki  $\mathbf{a} = \mathbf{p}(t) = \mathbf{q}(\varphi(u))$  enaka  $\mathbf{p}'(t)\dot{\varphi}(u)$  (pri tem smo s črtico označili odvod po prvotnem parametru  $t$ , s piko pa odvod po novem parametru  $u$ ). Tangenta očitno ni invariantna glede na reparametrizacijo, je pa to res za enotsko tangento. Za krivulje obstajajo tudi druge invariante glede na reparametrizacijo. Toda njihovo število je odvisno od dimezije prostora, kjer se krivulja nahaja. Za ravninsko krivuljo je tako poleg enotske tangente invarianta tudi *ukrivljenost* krivulje. Za njeno definicijo potrebujemo pojem planarnega vektorskega produkta.

DEFINICIJA 2.1.3 Za vektorja  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T, \mathbf{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$  je planarni vektorski produkt  $\times$  definiran s predpisom  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = u_1 v_2 - u_2 v_1$ .

Planarni vektorski produkt je v resnici kar determinanta  $\det[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ . Predznačeno ukrivljenost ravninske parametrične krivulje sedaj definiramo takole.

DEFINICIJA 2.1.4 Naj bo  $\mathbf{p}$  regularna ravninska krivulja. Potem je predznačena ukrivljenost (rečemo ji tudi predznačena fleksijska ukrivljenost) v točki  $\mathbf{p}(t)$  enaka

$$\kappa(t) = \frac{\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)}{\|\mathbf{p}'(t)\|^3},$$

kjer je  $\|\cdot\|$  Evklidska norma.

Za krivulje v  $d$ -dimenzionalnem prostoru je  $d - 1$  invariant glede na reparametrizacije. Te invariante krivuljo do togega premika enolično določajo. Omenimo samo še *torzijsko ukrivljenost* prostorske krivulje.

DEFINICIJA 2.1.5 Torzijska ukrivljenost regularne prostorske krivulje  $\mathbf{p}$  v točki  $\mathbf{p}(t)$  je

$$\tau(t) = \frac{\det[\mathbf{p}'(t), \mathbf{p}''(t), \mathbf{p}'''(t)]}{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|^2}$$

pri čemer je  $\times$  klasični vektorski produkt.

Poleg invariant glede na reparametrizacijo, je pomemben tudi tip parametrične krivulje. Ker je v CAGD končni cilj ponavadi implementacija



algoritmov in metod v praksi, so zelo zaželjene predvsem polinomske ali racionalne parametrične krivulje. V nadaljevanju se bomo ukvarjali predvsem s polinomskimi, torej takimi, katerih komponente  $p_i$  so polinomi stopnje  $\leq n$ . Naj pa omenimo, da se v zadnjem času vse več uporabljajo tudi racionalne, saj omogočajo konstrukcijo bolj natančnejših algoritmov za interpolacijo in aproksimacijo.

# Poglavje 3

## Bézierove krivulje

Za uvod v obsežno teorijo polinomskih parametričnih krivulj si bomo ogledali *Bézierove krivulje*. To je poseben razred krivulj, ki sta jih neodvisno uvedla P. Bézier<sup>1</sup> in P. de Casteljaou<sup>2</sup>. V raziskovalni sferi je bilo najprej opaženo delo Béziera, čeprav se je kasneje izkazalo, da je de Casteljaou odkril omenjeni tip krivulj neodvisno. Osnovna ideja obeh raziskovalcev je bila konstruirati krivulje, s katerimi bi oblikovalci hitro in učinkovito modelirali objekte. Za motivacijo si bomo ogledali de Casteljaouov algoritem, ki velja za osnovni algoritem pri konstrukciji Bézierovih krivulj (algoritem je neodvisno odkril tudi raziskovalec v Bézierovi skupini).

### 3.1 de Casteljaouov algoritem

Splošni algoritem za izračun vrednosti točke na Bézierovi krivulji bomo najprej predstavili s preprostim primerom. Denimo, da so podane tri točke  $\mathbf{b}_j \in \mathbb{E}^2$ ,  $j = 0, 1, 2$ . Izberimo parameter  $t \in \mathbb{R}$  in konstruirajmo

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_0^1(t) &= (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1, \\ \mathbf{b}_1^1(t) &= (1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2, \\ \mathbf{b}_0^2(t) &= (1-t)\mathbf{b}_0^1(t) + t\mathbf{b}_1^1(t).\end{aligned}$$

Opazimo, da v vsaki enačbi nastopa baricentrična kombinacija točk, torej je končni rezultat točka v ravnini. Ko vstavimo prvi dve enakosti v tretjo, dobimo

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)^2\mathbf{b}_0 + 2t(1-t)\mathbf{b}_1 + t^2\mathbf{b}_2, \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup>Pierre Étienne Bézier, 1910-1999, francoski razvojni inženir pri Renaultu.

<sup>2</sup>Paul de Faget de Casteljaou, 1930-, francoski razvojni inženir v Citroënu.

torej kvadratno parametrično  $\mathbf{b}^2 := \mathbf{b}_0^2$  krivuljo. Konstrukcija je afino invariantna, saj je končna krivulja dobljena kot ponavljanje linearne interpolacije, ki je afino invariantna. Iz (3.1) med drugim sledi tudi to, da je krivulja ravninska.

Sedaj smo pripravljeni na splošni de Casteljauov algoritem.

**Algoritem 3.1.1** Podatki:  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{E}^d$  in  $t \in \mathbb{R}$ .

**Definirajmo:**  $\mathbf{b}_j^0(t) = \mathbf{b}_j, j = 0, 1, \dots, n$ .

**Ponavljajmo:**

$$\mathbf{b}_j^k(t) = (1-t)\mathbf{b}_j^{k-1} + t\mathbf{b}_{j+1}^{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, n-k.$$

**Izhod:**  $\mathbf{b}^n(t) := \mathbf{b}_0^n(t)$  je točka pri parametru  $t$  na Bézierovi krivulji  $\mathbf{b}^n$ .

Pri računanju ponavadi točke iz algoritma 3.1.1 zložimo v trikotno tabelo

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \mathbf{b}_0^0 \\ & & & & & & \mathbf{b}_1^0 & \mathbf{b}_0^1 \\ & & & & & & \mathbf{b}_2^0 & \mathbf{b}_1^1 & \cdots \\ & & & & & & \vdots & \vdots & \cdots & \mathbf{b}_0^{n-1} \\ & & & & & & \mathbf{b}_n^0 & \mathbf{b}_{n-1}^1 & \cdots & \mathbf{b}_1^{n-1} & \mathbf{b}_0^n \end{array}$$

Če vse vmesne točke tudi zares potrebujemo, potem potrebujemo  $\mathcal{O}(n^2)$  prostora, da jih shranimo. Pogosto pa potrebujemo le končne vrednosti, zato lahko vsak nov stopec točk prepisemo kar v prvega, za kar potrebujemo le  $\mathcal{O}(n)$  prostora.

Pomembno vlogo v praksi ima poligon  $\mathcal{P}$ , ki ga zaporedoma tvorijo točke  $\mathbf{b}_j$ . Pravimo mu *kontrolni poligon*, točkam  $\mathbf{b}_j$  pa *kontrolne točke*.

## 3.2 Razcvetna oblika Bézierove krivulje

Na Bézierovo krivuljo lahko gledano tudi drugače. Oglejmo si naslednjo posplošitev de Casteljauovega algoritma 3.1.1. V algoritmu moramo izračunati  $n$  stolpcev, vrednost krivulje pri parametru  $t$  pa preberemo na koncu zadnjega stolpca. Namesto, da bi na  $k$ -tem koraku uporabili parameter  $t$ ,

uporabimo nov parameter  $t_k$ . V kubičnem primeru tako dobimo naslednjo tabelo vrednosti

$$\begin{array}{l} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_0^1[t_1] \\ \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_1^1[t_1] \quad \mathbf{b}_0^2[t_1, t_2] \\ \mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}_2^1[t_1] \quad \mathbf{b}_1^2[t_1, t_2] \quad \mathbf{b}_0^3[t_1, t_2, t_3]. \end{array}$$

Končna točka  $\mathbf{b}_0^3[t_1, t_2, t_3]$  je sedaj funkcija treh neodvisnih spremenljivk, torej nanjo lahko gledamo kot na funkcijo iz  $\mathbb{R}^3$  v  $\mathbb{E}^3$ . Seveda lahko isti razmislek posplošimo na poljubno stopnjo  $n$ . Končni funkciji  $\mathbf{b}[\cdot, \dots, \cdot]$ , ki je tako odvisna od  $n$  spremenljivk, rečemo *razcvet* Bézierove krivulje  $\mathbf{b}^n$ . Originalno krivuljo dobimo preprosto tako, da  $\mathbf{b}$  izračunamo pri argumentih  $t_1 = t_2 = \dots = t_n = t$ .

Oglejmo si nekaj posebnih primerov izračuna v razcvetni obliki. Iz de Casteljauovega algoritma neposredno sledi  $\mathbf{b}[0, 0, \dots, 0] = \mathbf{b}_0$  in  $\mathbf{b}[1, 1, \dots, 1] = \mathbf{b}_n$ . Shema za  $[t_1, t_2, \dots, t_n] = [0, 0, \dots, 1]$  pa se glasi

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{b}_0 & & & & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & & & & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \ddots & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{b}_0 & & & \\ \mathbf{b}_n & \mathbf{b}_{n-1} & \cdots & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}[0, 0, \dots, 0, 1]. & & \end{array}$$

Od tod zlahka vidimo, da je

$$\mathbf{b}_j = \mathbf{b}[0^{(n-j)}, 1^{(j)}],$$

kjer  $t^{(i)}$  pomeni  $i$  ponovitev argumenta  $t$ .

V razcvetni obliki se de Casteljauov algoritem tako izraža kot

$$\begin{aligned} & \mathbf{b}[0^{(n-k-j)}, t^{(k)}, 1^{(j)}] \\ &= (1-t) \mathbf{b}[0^{(n-k-j+1)}, t^{(k-1)}, 1^{(j)}] + t \mathbf{b}[0^{(n-k-j)}, t^{(k-1)}, 1^{(j+1)}]. \end{aligned}$$

Točka na krivulji je tedaj  $\mathbf{b}[t^{(n)}]$ . Obenem opazimo, da pri izračunu v razcvetni obliki ni pomemben vrstni red argumentov, torej je razcvet simetrična polinomska funkcija svojih argumentov. Toda ob tem ima še eno pomembno lastnost, je afina funkcija v vseh argumentih, ali kot rečemo na kratko, multiafina funkcija.

Seveda lahko razcvet gledamo kot na Bézierovo krivuljo, definirano nad intervalom  $[a, b]$ . Tedaj se de Casteljauov algoritem nad tem intervalom zapiše v obliki

$$\mathbf{b}_j^k = \frac{b-u}{b-a} \mathbf{b}_j^{k-1} + \frac{u-a}{b-a} \mathbf{b}_{j+1}^{k-1}.$$

Posamezne kontrolne točke v razcvetni obliki se tedaj izražajo kot

$$\mathbf{b}_j = \mathbf{b}[a^{(n-j)}, b^{(j)}].$$

Videli bomo, da s pomočjo razcvetne oblike zelo enostavno izrazimo nekatere pomembne algoritme z Bézierovimi krivuljami. Najprej pa si oglejmo še eno obliko zapisa Bézierove krivulje.

### 3.3 Bernsteinova oblika Bézierove krivulje

Že zgled v prejšnjem razdelku je pokazal, da lahko Bézierovo krivuljo zapišemo kot posebno linearno kombinacijo polinomov in kontrolnih točk. Izkaže se, da je to res za vsako stopnjo Bézierove krivulje. Glavno vlogo pri tem igrajo *Bernsteinovi*<sup>3</sup> *polinomi*.

DEFINICIJA 3.3.1 *Bernsteinov polinom stopnje  $n$  z indeksom  $i$  je definiran kot*

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in [0, 1].$$

Bernsteinovi polinomi so pomembni na več področjih matematike, morda najbolj v teoriji aproksimacij zveznih funkcij. Imajo celo kopico lepih lastnosti. Naštejmo samo nekatere (vse se nanašajo na interval  $[0, 1]$ ):

- $B_i^n(t) \geq 0$ .
- So baza prostora polinomov stopnje  $\leq n$ .
- $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$ .
- Tvorijo particijo enote, torej

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1.$$

---

<sup>3</sup>Sergei Natanovič Bernstein, 1880-1968, ruski matematik rojen v Odessi (sedanja Ukrajina).

- Polinom  $B_i^n$  ima natanko en ekstrem (maksimum) v točki  $t = i/n$ .
- Velja rekurzivna zveza

$$B_i^n(t) = (1-t)B_{i-1}^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t), \quad (3.2)$$

pri čemer velja dogovor, da je  $B_i^n(t) = 0$ , če je  $i < 0$  ali  $i > n$ .

- Za odvod in integral velja

$$\frac{d}{dt}B_i^n(t) = n \left( B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t) \right), \quad (3.3)$$

$$\int B_i^n(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} B_j^{n+1}(t) + \text{konst.} \quad (3.4)$$

Vse lastnosti se dokaže dokaj enostavno. Formalne izračune prepuščamo bralcu. Naslednji pomemben izrek karakterizira Bézierovo krivuljo v Bernsteinovi obliki.

**IZREK 3.3.1** Naj bodo  $\mathbf{b}_j \in \mathbb{E}^d$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , kontrolne točke Bézierove krivulje  $\mathbf{b}^n$ . Potem je

$$\mathbf{b}^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t), \quad t \in [0, 1].$$

**DOKAZ.** Oglejmo si de Casteljauov algoritem 3.1.1. Dovolj je dokazati, da se elementi  $k$ -tega stolpca v algoritmu izražajo kot

$$\mathbf{b}_j^k(t) = \sum_{\ell=j}^{j+k} \mathbf{b}_\ell^0(t) B_{\ell-j}^k(t) = \sum_{\ell=j}^{j+k} \mathbf{b}_\ell B_{\ell-j}^k(t), \quad j = 0, 1, \dots, n-k.$$

Izberimo stopnjo  $n$  (s tem seveda tudi osnovne kontrolne točke  $\mathbf{b}_j^0 := \mathbf{b}_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ ). Zgornjo formulo bomo dokazali z indukcijo na  $k$ . Za  $k = 0$  je po definiciji prvega stolpca v algoritmu 3.1.1 in po definiciji 3.3.1 Bernsteinovega polinoma

$$\mathbf{b}_j^0(t) = \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_j B_0^0(t) = \sum_{\ell=j}^j \mathbf{b}_\ell B_{\ell-j}^0(t).$$

Predpostavimo sedaj, da je za nek  $k < n$

$$\mathbf{b}_j^k(t) = \sum_{\ell=j}^{j+k} \mathbf{b}_\ell B_{\ell-j}^k(t), \quad j = 0, 1, \dots, n-k.$$

Elemente novega stolpca v de Casteljauovem algoritmu dobimo po formuli

$$\mathbf{b}_j^{k+1}(t) = (1-t)\mathbf{b}_j^k(t) + t\mathbf{b}_{j+1}^k(t), \quad j = 0, 1, \dots, n-k-1.$$

Uporabimo indukcijsko predpostavko ter lastnost (3.2) Bernsteinovih polinomov in dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_j^{k+1}(t) &= (1-t) \sum_{\ell=j}^{j+k} \mathbf{b}_\ell B_{\ell-j}^k(t) + t \sum_{\ell=j+1}^{j+1+k} \mathbf{b}_\ell B_{\ell-j-1}^k(t) \\ &= \mathbf{b}_j (1-t) B_0^k(t) + \sum_{\ell=j+1}^{j+k} \mathbf{b}_\ell \left( (1-t) B_{\ell-j}^k(t) + t B_{\ell-j-1}^k(t) \right) + \mathbf{b}_{j+1+k} t B_k^k(t) \\ &= \mathbf{b}_j B_0^{k+1}(t) + \sum_{\ell=j+1}^{j+k} \mathbf{b}_\ell B_{\ell-j}^{k+1}(t) + \mathbf{b}_{j+1+k} B_{k+1}^{k+1}(t) = \sum_{\ell=j}^{j+1+k} \mathbf{b}_\ell B_{\ell-j}^{k+1}(t). \end{aligned}$$

S tem je dokaz končan.  $\square$

Iz izreka 3.3.1 se da hitro razbrati nekaj zelo pomembnih lastnosti Bézierovih krivulj.

**IZREK 3.3.2** Naj bo  $\mathbf{b}^n$  Bézierova krivulja s kontrolnimi točkami  $\mathbf{b}_j \in \mathbb{E}^d$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Zanje velja naslednje:

1. Krivulja je afino invariantna.
2. Krivulja je invariantna glede na afino transformacijo parametra, natančneje

$$\mathbf{b}^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t), \quad t = \frac{u-a}{b-a}, \quad u \in [a, b].$$

3. Interpolira robni kontrolni točki,  $\mathbf{b}^n(0) = \mathbf{b}_0$  in  $\mathbf{b}^n(1) = \mathbf{b}_n$ .
4. Leži v konveksni ovojnici kontrolnih točk.
5. Vsaka hiperravnina v  $\mathbb{E}^d$  seka krivuljo kvečjemu tolikokrat kot njen kontrolni poligon.
6. Krivulja ima posebno simetrijo

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{n-j} B_{n-j}^n(1-t).$$

7. Invariantna je glede na baricentrične kombinacije. Naj bo  $\alpha + \beta = 1$ , potem je

$$\sum_{j=0}^n (\alpha \mathbf{b}_j + \beta \mathbf{c}_j) B_j^n(t) = \alpha \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) + \beta \sum_{j=0}^n \mathbf{c}_j B_j^n(t).$$

8. Ima lastnost linearne natančnosti. Naj bodo  $\mathbf{b}_j$  točke enakomerno razporejene na daljici med točkama  $\mathbf{c}$  in  $\mathbf{d}$ , torej

$$\mathbf{b}_j = \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{c} + \frac{j}{n} \mathbf{d}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Potem je Bézierova krivulja natanko daljica med  $\mathbf{c}$  in  $\mathbf{d}$ .

9. Imajo lastnost psevdo lokalne kontrole. Če premaknemo samo eno kontrolno točko  $\mathbf{b}_j$ , se premik najbolj prozga v okolici točke, ki ustreza parametru  $j/n$ . V resnici se vse točke na krivulji premaknejo v smeri vektorja premika kontrolne točke.

10. Višjo odvodi se izražajo kot

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{b}^n(t) = n(n-1) \cdots (n-r+1) \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{b}_j B_j^{n-r}(t), \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

Pri tem je  $\Delta \mathbf{b}_j := \mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j$  in  $\Delta^r \mathbf{b}_j = \Delta (\Delta^{r-1}) \mathbf{b}_j$ .

DOKAZ. Podroben dokaz posameznih točk bomo izpustili. Večino dokazov ali pa vsaj zelo podrobnih namigov je v [10]. Skoraj vse zgornje lastnosti sledijo bolj ali manj iz lastnosti Bernsteinovih polinomov. Za "pokušino" dokažimo denimo le zadnjo lastnost. Iz (3.5) in definicije preme diference  $\Delta$  je očitno, da je dovolj dokazati primer  $r = 1$ . Iz Bernsteinove oblike Bézierove krivulje sledi

$$\frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \frac{d}{dt} B_j^n(t),$$

iz (3.3) pa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t) &= n \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \left( B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t) \right) \\ &= n \left( \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_j B_{j-1}^{n-1}(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{b}_j B_j^{n-1}(t) \right) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_j B_j^{n-1}(t), \end{aligned}$$

in dokaz je končan.  $\square$



### 3.4 Subdivizija

V prejšnjih razdelkih smo videli, da je Bézierova krivulja ponavadi definirana na intervalu  $[0, 1]$ . Včasih pa želimo izraziti samo del osnovne Bézierove krivulje, denimo nad intervalom  $[0, c]$ , kot samostojno Bézierovo krivuljo. Iskanju kontrolnih točk tega dela krivulje rečemo *subdivizija*. Naj ima osnovna krivulja kontrolne točke  $\mathbf{b}_j, j = 0, 1, \dots, n$ , iskana krivulja pa kontrolne točke  $\mathbf{c}_j, j = 0, 1, \dots, n$ . Želimo, da je  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_n = \mathbf{b}^n(c)$  ter del krivulje  $\mathbf{b}^n$  nad intervalom  $[0, c]$  natanko krivulja  $\mathbf{c}^n$ . Če uporabimo razcvetni pristop iz prejšnjega razdelka, brez težav dobimo kontrolne točke  $\mathbf{c}_j$ . Ker nas zanima interval  $[0, c]$ , je

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{b}[0^{(n-j)}, c^{(j)}].$$

V nerazcvetni obliki torej  $\mathbf{c}_j = \mathbf{b}_0^j(c)$ . Dobljena formula se imenuje subdivizijska formula za Bézierovo krivuljo. Tako smo dognali, da de Casteljauov algoritem poleg izračuna točke  $\mathbf{b}^n(c)$ , vrne tudi kontrolne točke Bézierove krivulje, ki ustreza intervalu  $[0, c]$ . Seveda zaradi lastnosti simetrije velja, da so kontrolne točke dela krivulje, ki ustreza intervalu  $[c, 1]$ , podane z  $\mathbf{b}_j^{n-j}$ .

Subdivizijo seveda lahko ponavljamo. Najprej denimo pri parametru  $t = 1/2$ , nato pa spet na polovici dveh dobljenih subdivizij. Tako po  $k$  korakih pridemo do  $2^k$  kontrolnih poligonov, ki skupaj opisujejo celo osnovno Bézierovo krivuljo. Vsak od njih pa le majhen lok. Poligoni konvergirajo k loku krivulje z rastočim  $k$  zelo hitro, kar s pridom uporabimo pri nekaterih praktičnih problemih. Oglejmo si enega od njih.

Želimo poiskati presečišče ravninske Bézierove krivulje  $\mathbf{b}^n$  s premico  $\ell$ . Najprej uporabimo lastnost konveksne ovojnice. Da bo presečišče obstajalo, mora premica sekati konveksno ovojnico kontrolnih točk. Toda v praksi je računanje konveksne ovojnice zamudno, zato lahko problem nekoliko poenostavimo (pri tem pa morda potrebujemo nekaj več korakov algoritma). Namesto konveksne ovojnice lahko gledamo t.i. minimalni pravokotnik kontrolnega poligona. To je najmanjši pravokotnik, ki vsebuje kontrolne točke. Njegova konstrukcija je enostavna, po lastnosti konveksne ovojnice pa krivulja leži tudi v tem pravokotniku. Potreben pogoj, da  $\ell$  seka krivuljo  $\mathbf{b}^n$  je, da seka dobljeni pravokotnik. Če ga ne, presečišča ni, sicer pa je nadaljevanje algoritma na dlani. Naredimo subdivizijo pri  $t = 1/2$ . Izračunamo oba minimalna pravokotnika in preverimo, ali premica seka kakšnega od njih. Nato nadaljujemo na tistem delu (ali obeh), kjer presečišče obstaja. Ker se pravokotniki hitro zmanjšujejo,

lahko za presečišče po nekaj korakih vzamemo kar središče tistega pravokotnika, ki ga premica seka.

### 3.5 Višanje in nižanje stopnje

Spoznali smo, da kontrolni poligon Bézierove krivulje lahko pove veliko o njenih lastnostih. Vendar njegova geometrija včasih ni dovolj fleksibilna za modeliranje oblike krivulje. V takem primeru bi želeli kontrolni poligon razširiti z novo točko, obenem pa ohraniti osnovno obliko krivulje. Oglejmo si ta problem malce bolj podrobno.

Naj bo  $\mathbf{b} := \mathbf{b}^n$  Bézierova krivulja stopnje  $n$  s kontrolnimi točkami  $\mathbf{b}_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Kontrolne točke želimo razširiti z novo točko, torej poiskati kontrolne točke  $\mathbf{b}_j^{(1)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n+1$ , tako, da bo dobljena Bézierova krivulja  $\mathbf{b}^{(1)}$  enaka  $\mathbf{b}$ . Očitno mora veljati

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} = \mathbf{b}^{(1)}(t) = \sum_{j=0}^{n+1} \mathbf{b}_j^{(1)} \binom{n+1}{j} t^j (1-t)^{n+1-j}. \quad (3.6)$$

Ko levo stran pomnožimo z  $(t + (1-t))$ , se (3.6) prepíše v

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} \left( t^j (1-t)^{n+1-j} + t^{j+1} (1-t)^{n-j} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \mathbf{b}_j^{(1)} \binom{n+1}{j} t^j (1-t)^{n+1-j}. \end{aligned}$$

Primerjajmo koeficiente pri  $t^j (1-t)^{n+1-j}$  na obeh straneh in zapišimo naslednji izrek.

**IZREK 3.5.1 (VIŠANJE STOPNJE)** *Naj bo  $\mathbf{b}$  Bézierova krivulja stopnje  $n$  podana s kontrolnimi točkami  $\mathbf{b}_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Zapišemo jo lahko kot Bézierovo krivuljo  $\mathbf{b}^{(1)}$  stopnje  $n+1$ . Med kontrolnimi točkami  $\mathbf{b}_j$  krivulje  $\mathbf{b}$  in kontrolnimi točkami  $\mathbf{b}_j^{(1)}$  krivulje  $\mathbf{b}^{(1)}$  velja zveza*

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0^{(1)} &= \mathbf{b}_0, \\ \mathbf{b}_j^{(1)} &= \frac{j}{n+1} \mathbf{b}_{j-1} + \left( 1 - \frac{j}{n+1} \right) \mathbf{b}_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ \mathbf{b}_{n+1}^{(1)} &= \mathbf{b}_n. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Iz zveze (3.7) sledi, da nov kontrolni poligon leži v konveksni ovojnici originalnega. Torej je "bližje" krivulji  $\mathbf{b}$  kot originalni. To nam da idejo za zaporedno višanje stopnje. S tem bomo dobili isto krivuljo zapisano v obliki Bézierove krivulje višje stopnje, novi kontrolni poligoni pa se bodo približevali krivulji (ne spregljete, da ima vsak nov kontrolni poligon eno točko več). S pomočjo matematične indukcije lahko dokažemo, da se kontrolne točke po  $r$  korakih višanja stopnje izražajo kot

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_0^{(r)} &= \mathbf{b}_0, \\ \mathbf{b}_j^{(r)} &= \sum_{k=0}^n \mathbf{b}_k \binom{n}{k} \frac{\binom{r}{j-k}}{\binom{n+r}{j}} \quad j = 1, \dots, n+r-1, \\ \mathbf{b}_{n+r}^{(r)} &= \mathbf{b}_n.\end{aligned}$$

Formalno se da pokazati, da kontrolni poligoni z višanjem stopnje konvergirajo h krivulji  $\mathbf{b}$ . Žal pa je red konvergence zelo počasen, zato nima velike uporabne vrednosti. Se pa lahko algoritem višanja stopnje pospološi v t. i. algoritem "rezanja kotov" [7].

Podobno kot višanje stopnje lahko poskusimo tudi z nižanjem stopnje. Jasno je, da ta postopek ne bo (vedno) ohranjal originalne krivulje, saj je malo verjetno, da je krivulja nastala z višanjem stopnje. Lahko pa izvedemo aproksimacijo originalne krivulje s krivuljo nižje stopnje. Problem lahko zastavimo podobno kot prej, le da sedaj za dano krivuljo  $\mathbf{b}$  iščemo kontrolne točke  $\mathbf{b}_j^{(-1)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , krivulje  $\mathbf{b}^{(-1)}$ , ki aproksimira  $\mathbf{b}$ . Predpostavimo za trenutek, da smo kontrolne točke  $\mathbf{b}_j$  dobili iz kontrolnih točk  $\mathbf{b}_j^{(-1)}$  z višanjem stopnje (kot rečeno, to v splošnem seveda ni res). Potem lahko izpeljemo dve rekurzivni formuli za kontrolne točke znižane stopnje

$$\mathbf{b}_j^{(-1)} = \frac{n\mathbf{b}_j - j\mathbf{b}_{j-1}^{(-1)}}{n-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{b}_j^{(-1)} = \frac{n\mathbf{b}_j - (n-j)\mathbf{b}_j^{(-1)}}{j}, \quad j = n, n-1, \dots, 1. \quad (3.9)$$

V praksi se izkaže, da lahko obe formuli kombiniramo. Za "levo" polovico kontrolnih točk (torej tiste, ki so glede na indeks bližje  $\mathbf{b}_0$ ) uporabimo (3.8), za "desno" polovico pa (3.9).

# Poglavje 4

## Zlepki Bézierovih krivulj

V tem poglavju si bomo ogledali naravno nadgradnjo Bézierovih krivulj, *zlepke*. Najbolj pogosta problema pri modeliranju ali oblikovanju sta gotovo *interpolacija* in *aproksimacija*. Pri prvem imamo nalogo, da med določenimi objekti (v našem primeru na primer Bézierovimi krivuljami) poiščemo takega, ki poteka skozi podane točke. Aproksimacijski problem interpolacijo malo poenostavi. Zahtevo, da krivulja poteka skozi dane točke zamenjamo s težnjo, da se jim vsaj dovolj približa. Pri obeh problemih naletimo na težave, ko je danih točk veliko. Tedaj bi za rešitev problema v splošnem potrebovali Bézierovo krivuljo visoke stopnje. To pa vsaj zaradi dveh slabosti ni dobra izbira: preveč računanja in slabe interpolacijske lastnosti polinomov visokih stopenj (spomnite se Rungejevega primera pri interpolaciji funkcij). Ker na število podatkov ponavadi nimamo vpliva, nam ostane samo ena smiselna možnost. Za objekte vzamemo krivulje nižjih stopenj, z njimi interpoliramo ali aproksimiramo manjše število podatkov, nato pa dobljene odseke lepimo med seboj. Objekt, ki ga dobimo, imenujemo *zlepka*. V naslednjem razdelku ga bomo formalno definirali.

### 4.1 Definicija, lokalnost in globalnost

Zlepke lahko seveda definiramo zelo splošno. Vsi pristopi imajo skupno vsaj dvoje. Odločiti se moramo, v kakšni obliki bomo zlepke zapisali ter določiti stičišča posameznih delov. Pri parametričnih krivuljah to praktično pomeni, da se moramo odločiti za konkretno parametrizacijo zlepka.

DEFINICIJA 4.1.1 Naj bo dano naraščajoče zaporedje delilnih točk (včasih jim rečemo tudi vozli)

$$u_0 < u_1 < \cdots < u_{N-1} < u_N. \quad (4.1)$$

Parametrična polinomska krivulja  $\mathbf{s} : [u_0, u_N] \rightarrow \mathbb{E}^d$  je Bézierov zlepek stopnje  $n$  z gladkostjo  $k$ , če velja:

1. Odsek zlepka  $\mathbf{s}|_{[s_j, s_{j+1}]}$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$ , je Bézierova krivulja stopnje  $n$ .
- 2.

$$\frac{d^\ell}{du^\ell} \mathbf{s}(u_j - 0) = \frac{d^\ell}{du^\ell} \mathbf{s}(u_j + 0), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad \ell = 0, 1, \dots, k.$$

Pri tem smo z  $\mathbf{s}(u - 0)$  in  $\mathbf{s}(u + 0)$  označili levo in desno limito krivulje  $\mathbf{s}$  pri parametru  $u$ . Zaradi krajših oznak bomo za odsek zlepka na intervalu  $[u_j, u_{j+1}]$  na kratko pisali kar  $\mathbf{s}_j$ .

Parametru  $u$ , ki preteče interval  $[u_0, u_N]$  pravimo *globalni* parameter. Smiselno pa je, da na posameznem odseku krivuljo  $\mathbf{s}$ , ki je tu po definiciji Bézierova krivulja, gledamo v t.i. lokalnem parametru  $t$ ,

$$t = \frac{u - u_j}{\Delta_j}, \quad u \in [u_j, u_{j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.2)$$

Z  $\Delta_j$  smo na kratko označili količino  $\Delta u_j = u_{j+1} - u_j$ . Lokalni parameter tako na  $j$ -tem odseku vedno preteče enotski interval  $[0, 1]$ . Ker je transformacija (4.2) afina, očitno velja

$$\mathbf{s}|_{[u_j, u_{j+1}]}(u) = \mathbf{s}_j(t).$$

Pri preverjanju pogojev gladkosti zlepka bomo vseskozi uporabljali naslednjo zvezo med globalnim in lokalnim parametrom. Izberimo  $u \in [u_j, u_{j+1}]$ . Potem je

$$\frac{d}{du} \mathbf{s}(u) = \frac{d}{dt} \mathbf{s}_j(t) \frac{dt}{du} = \frac{1}{\Delta_j} \frac{d}{dt} \mathbf{s}_j(t). \quad (4.3)$$

Točkam  $\mathbf{s}(u_j) = \mathbf{s}_j(0) = \mathbf{s}_{j-1}(1)$ , kjer se posamezni odseki krivulj stikajo, bomo rekli *stične točke*. Množici vseh kontrolnih poligonov posameznih odsekov Bézierovih krivulj pa *odsekoma Bézierov poligon* krivulje  $\mathbf{s}$ .

Iz (4.2) je razvidno, da izbira delilnih točk igra pomembno vlogo pri pogojih gladkosti. Pa ne samo to, izkazalo se bo, da močno vpliva tudi na obliko zlepka  $\mathbf{s}$ .

## 4.2 Pogoji gladkosti

Posvetimo se sedaj pogojem, ki zagotavljajo gladkost Bézierove krivulje v posamezni delilni točki. To so očitno tudi edine točke, v katerih je treba gladkost posebej preverjati, saj je drugje zlepek lokalno polinomska parametrična krivulja. Oglejmo si najpreprostejši primer, Bézierov zlepek  $\mathbf{s}$ , sestavljen iz dveh odsekov  $\mathbf{s}_0$  in  $\mathbf{s}_1$ , definiranih na intervalih  $[u_0, u_1]$  in  $[u_1, u_2]$ ,  $u_0 < u_1 < u_2$ . Ker je vsak odsek Bézierova krivulja stopnje  $n$ , bo enolično določena s kontrolnimi točkami. Zaradi lastnosti interpolacije robnih kontrolnih točk od tod sledi, da bo zlepek zvezen v točki  $\mathbf{s}(u_1)$ , če bosta prva kontrolna točka  $\mathbf{s}_0$  in zadnja kontrolna točka  $\mathbf{s}_1$  enaki. Ob upoštevanju tega dejstva lahko kontrolne točke  $\mathbf{s}_0$  označimo z  $\mathbf{b}_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , kontrolne točke  $\mathbf{s}_1$  pa z  $\mathbf{b}_j$ ,  $j = n, n+1, \dots, 2n$ . Nadaljujmo z obravnavanjem pogojev  $C^1$  zveznosti. Iz definicije zlepka, (4.2), (4.3) in (3.5) dobimo

$$\frac{1}{\Delta_0} \Delta \mathbf{b}_{n-1} = \frac{1}{\Delta_1} \Delta \mathbf{b}_n. \quad (4.4)$$

Tako smo prišli do naslednjega pomembnega izreka.

**IZREK 4.2.1** *Naj bo  $\mathbf{s} : [u_0, u_2] \rightarrow \mathbb{E}^d$  Bézierov zlepek, ki je nad intervalom  $[u_0, u_1]$ ,  $u_0 < u_1 < u_2$ , podan kot Bézierova krivulja  $\mathbf{s}_0$  s kontrolnimi točkami  $\mathbf{b}_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , nad intervalom  $[u_1, u_2]$  pa kot Bézierova krivulja  $\mathbf{s}_1$ , podana s kontrolnimi točkami  $\mathbf{b}_j$ ,  $j = n, n+1, \dots, 2n$ . Zlepek  $\mathbf{s}$  je v točki  $u_1$  zvezno odvedljiv, če je*

$$\mathbf{b}_{n+1} = \mathbf{b}_n + \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \Delta \mathbf{b}_{n-1}. \quad (4.5)$$

Iz zadnjega izreka je razvidno, da je zlepek  $\mathbf{s}$  zvezno odvedljiva krivulja ( $C^1$  krivulja) natanko tedaj, ko so točke  $\mathbf{b}_{n-1}$ ,  $\mathbf{b}_n$  in  $\mathbf{b}_{n+1}$  kolinearne, hkrati pa razdalje med njimi v ustreznem razmerju, ki ga določa domena krivulje  $\mathbf{s}$ . Zvezna odvedljivost je torej bistveno odvisna tudi od izbire delilnih točk  $u_j$ .

Naslednje naravno vprašanje je, kakšni so pogoji za zvezno odvedljivost višjega reda. Oglejmo si podrobneje še zveznost drugih odvodov ( $C^2$  zveznost). Privzemimo enake oznake kot pri obravnavi pogojev  $C^1$  zveznosti. V delilni točki  $u_1$  se mora poleg prvih odvodov sosednjih segmentov  $\mathbf{s}_0$  in  $\mathbf{s}_1$ , ujemati še drugi odvod. Tako ponovno iz (4.2), (4.3) in (3.5) dobimo

$$\frac{1}{\Delta_0^2} \Delta^2 \mathbf{b}_{n-2} = \frac{1}{\Delta_1^2} \Delta^2 \mathbf{b}_n. \quad (4.6)$$

Slednji pogoj lahko zapišemo tudi nekoliko drugače.

IZREK 4.2.2 Naj bodo izpolnjeni pogoji izreka 4.2.1. Zlepek  $\mathbf{s}$  je v točki  $u_1$  dvakrat zvezno odvedljiv natanko tedaj, ko obstaja točka  $\mathbf{d}$ , za katero velja

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{n-1} &= (1 - t_1) \mathbf{b}_{n-2} + t_1 \mathbf{d}, \\ \mathbf{b}_{n+1} &= (1 - t_1) \mathbf{d} + t_1 \mathbf{b}_{n+2},\end{aligned}$$

kjer je

$$t_1 = \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_1}.$$

DOKAZ. Privzemimo najprej, da je zlepek  $\mathbf{s}$  dvakrat zvezno odvedljiv v  $u_1$ . Iz (4.4) dobimo

$$\mathbf{b}_n = \frac{1}{\Delta_0 + \Delta_1} (\Delta_0 \mathbf{b}_{n+1} + \Delta_1 \mathbf{b}_{n-1}) \quad (4.7)$$

z množenjem zveze (4.6) z  $-\Delta_0 \Delta_1$  pa še

$$-\frac{\Delta_1}{\Delta_0} \Delta^2 \mathbf{b}_{n-2} = -\frac{\Delta_0}{\Delta_1} \Delta^2 \mathbf{b}_n. \quad (4.8)$$

Upoštevajmo zvezo (4.7), in (4.8) prepíšimo v

$$\frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0} \mathbf{b}_{n-1} - \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \mathbf{b}_{n-2} = \frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_1} \mathbf{b}_{n+1} - \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \mathbf{b}_{n+2}.$$

Kratek račun pokaže, da leva in desna stran zgornje enakosti predstavljata ravno točko  $\mathbf{d}$  iz izreka.

Predpostavimo sedaj, da obstaja točka  $\mathbf{d}$ , ki izpolnjuje pogoje izreka. Potem je

$$\mathbf{b}_{n+2} = \frac{1}{t_1} (\mathbf{b}_{n+1} - (1 - t_1) \mathbf{d}) = \frac{1}{t_1} \left( \mathbf{b}_{n+1} - \frac{1 - t_1}{t_1} (\mathbf{b}_{n-1} - (1 - t_1) \mathbf{b}_{n-2}) \right).$$

Upoštevamo še (4.5) in z nekaj računanja pridemo do

$$\frac{1}{\Delta_1^2} (\mathbf{b}_{n+2} - 2 \mathbf{b}_{n+1} + \mathbf{b}_n) = \frac{1}{\Delta_0^2} (\mathbf{b}_n - 2 \mathbf{b}_{n-1} + \mathbf{b}_{n-2}),$$

kar je ravno pogoj za  $C^2$  zveznost.  $\square$

Pogoji za višji red zveznosti so le redko potrebni v praksi. Vseeno jih zapišimo. Krivlja  $\mathbf{s}$  je v točki  $u_1$  zvezna do reda  $r$  ( $C^r$  zvezna) natanko tedaj, ko je

$$\left( \frac{1}{\Delta_0} \right)^i \Delta^i \mathbf{b}_{n-i} = \left( \frac{1}{\Delta_1} \right)^i \Delta^i \mathbf{b}_n, \quad i = 0, 1, \dots, r.$$

### 4.3 Kvadratični Bézierovi B-zlepki

Ker so pri  $C^1$  in  $C^2$  zveznih Bézierovih zlepkih kontrolne točke med seboj povezane, jih lahko izrazimo z manj podatki, kot pri splošni Bézierovi krivulji. Oglejmo si primer  $C^1$  zveznih kvadratičnih zlepkov. Ponovno izberimo zaporedje delilnih točk  $u_0 < u_1 < \dots < u_N$ . Zaradi (4.7) je kvadratični Bézierov zlepek določen že s kontrolnimi točkami

$$\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_j, j = 1, 3, \dots, 2N - 1, \mathbf{b}_{2N}. \quad (4.9)$$

Preostale kontrolne točke se izražajo kot

$$\mathbf{b}_{2j} = \frac{1}{\Delta_{j-1} + \Delta_j} (\Delta_j \mathbf{b}_{2j-1} + \Delta_{j-1} \mathbf{b}_{2j+1}), \quad j = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Očitno torej lahko kvadratični Bézierov zlepek definiramo samo z delinimi točkami in kontrolnimi točkami (4.9). Slednje tvorijo t.i. *poligon Bézierovega B-zlepka*<sup>1</sup> oz. *de Boorov poligon*. Ponavadi kontrolne točke tega poligona označimo z

$$\mathbf{d}_{-1} := \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{d}_j := \mathbf{b}_{2j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, N - 1, \quad \mathbf{d}_N := \mathbf{b}_{2N}. \quad (4.10)$$

Očitno vsak de Boorov poligon skupaj z zaporednjem delilnih točk določa  $C^1$  zvezni kvadratični Bézierov zlepek in obratno, vsak  $C^1$  zvezni kvadratični Bézierov zlepek ima natanko določen de Boorov poligon. Tudi za de Boorov poligon veljajo podobne lastnosti kot za Bézierov kontrolni poligon, denimo lastnost konveksne ovojnice, linearna natančnost, interpolacija robnih točk, simetrija in še nekatere druge. Opazimo tudi, da so posamezni odseki kvadratičnega zlepka ravninske krivulje (saj ležijo v konveksni ovojnici treh kontrolnih točk). Seveda pa je celotni zlepek lahko krivulja v  $d$ -dimeznionalnem prostoru.

Toda de Boorov kontrolni poligon ima še eno dodatno lastnost, ki je splošni Bézierov kontrolni poligon nima. Vemo namreč, da premik ene kontrolne točke Bézierove krivulje vpliva na celo krivuljo. Premik ene kontrolne točke de Boorovega kontrolnega poligona kvadratičnega zlepka pa vpliva največ na tri odseke. Taki lastnosti rečemo *lastnost lokalne kontrole*. Posledica tega je, da Bézierov B-zlepek lahko vsebuje odseke premic, četudi sam ni linearen. To pri splošnih Bézierovih krivuljah višje stopnje ni mogoče.

Podobno lahko v luči de Boorovega kontrolnega poligona definiramo tudi kubične Bézierove B-zlepke. Ker je konstrukcija malce bolj zepletana, jo bomo izpustili. Natančen opis je v [10], prvič pa je bila predstavljena v [5].

<sup>1</sup>Ne zamenjajte ga s klasičnim B-zlepkom.



## 4.4 Interpolacija z Bézierovimi zlepki

Najpogostejša naloga, pri kateri naletimo na Bézierove zlepke, je interpolacija. Formulacija problema je preprosta. Dano je zaporedje interpolacijskih točk

$$\mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^d, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad \mathbf{p}_{j+1} \neq \mathbf{p}_j. \quad (4.11)$$

Iščemo Bézierov zlepek, ki poteka skozi podane točke. Očitno moramo izbrati stopnjo Bézierovega zlepka in zaporedje delilnih točk (4.1). Stopnja zlepka je seveda lahko poljubna, vendar v praksi težimo k nizkim stopnjam predvsem zaradi manjše kompleksnosti in večje stabilnosti računanja. Linearni zlepki niso zanimivi, saj z njimi lahko dosežemo le zveznost. Tudi parabolični so preveč togi, saj ima kvadratna Bézierova krivulja konstanten predznak ukrivljenosti, kar močno omeji prilagodljivost krivulje podatkom. Prva smiselna izbira so kubični zlepki, ki so dober kompromis med fleksibilnostjo in računsko zahtevnostjo. V praksi se sicer pogosto uporabljajo še zlepki stopnje 5, toda tu se bomo omejili le na kubične.

Iščemo torej kubični Bézierov zlepek  $\mathbf{s} : [u_0, u_N] \rightarrow \mathbb{E}^d$ , ki interpolira točke (4.11) v delilnih točkah (4.1), natančneje

$$\mathbf{s}(u_j) = \mathbf{p}_j, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (4.12)$$

Poleg točk imamo lahko na voljo še dodatno informacijo, recimo tangentne vektorje v stičnih točkah,

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{s}'(u_j), \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (4.13)$$

Ogledali si bomo dve pomembni konstrukciji,  $C^1$  zvezne in  $C^2$  zvezne kubične zlepke.

## 4.5 $C^1$ zvezni kubični zlepki

Podatki za konstrukcijo so: zaporedje delilnih točk (4.1), interpolacijske točke (4.11) in pripadajoči tangentni vektorji (4.13). Iščemo  $C^1$  zvezni kubični zlepek  $\mathbf{s}$  ki interpolira točke in tangentne vektorje v danih delilnih točkah. Del zlepka na  $j$ -tem segmentu  $[u_j, u_{j+1}]$  je Bézierova krivulja, ki jo lahko opišemo s kontrolnimi točkami  $\mathbf{b}_{3j+k}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . Interpolacijski pogoji za točke so izpolnjeni, če je  $\mathbf{b}_{3j} = \mathbf{p}_j$  in  $\mathbf{b}_{3j+3} = \mathbf{p}_{j+1}$ . Po izreku 4.2.1 pa

mora za notranje kontrolne točke veljati

$$\mathbf{b}_{3j+1} = \mathbf{b}_{3j} + \frac{1}{3}\Delta_j \mathbf{v}_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{b}_{3j-1} = \mathbf{b}_{3j} - \frac{1}{3}\Delta_{j-1} \mathbf{v}_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.15)$$

Konstrukcija je s tem končana, žal pa so v praksi le redko znane delilne točke in popolna informacija o tangentnih vektorjih.

Zato je bolj zanimiva nalednja naloga: dano je zaporednje interpolacijskih točk (4.11) in smeri tangent v teh točkah  $\mathbf{d}_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ . Ponovno iščemo  $C^1$  zvezni interpolacijski kubični Bézierov zlepek  $\mathbf{s}$ . Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da za smeri tangent velja  $\|\mathbf{d}_j\| = 1$ . Zaradi interpolacije je ponovno  $\mathbf{b}_{3j} = \mathbf{p}_j$  in  $\mathbf{b}_{3j+3} = \mathbf{p}_{j+1}$ . Notranje kontrolne točke pa se podobno kot prej izražajo kot

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{3j+1} &= \mathbf{b}_{3j} + \alpha_j \mathbf{d}_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \\ \mathbf{b}_{3j-1} &= \mathbf{b}_{3j} - \beta_j \mathbf{d}_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Vsaka izbira pozitivnih parametrov  $\alpha_j$  in  $\beta_j$  določa natanko en  $C^1$  zvezen kubični zlepek. Seveda o njegovi obliki odloča velikost parametrov. Če so premajhni, lahko dobimo "vogale" v interpolacijskih točkah, če so preveliki, se pojavijo zanke. Delilne točke morajo izpolnjevati pogoje

$$\Delta_j = \frac{\alpha_j}{\beta_{j-1}} \Delta_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Praksa je pokazala, da se velikokrat dobro obnese izbira

$$\alpha_j = \beta_j = 0.4 \|\Delta \mathbf{p}_j\|.$$

V tem primeru za delilne točke velja

$$\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} = \frac{\|\Delta \mathbf{p}_j\|}{\|\Delta \mathbf{p}_{j-1}\|}.$$

Seveda pa je to le hevrstika, ki ne da vedno sprejemljivih oblik zleпка.

Podobno si lahko zastavimo še tretjo obliko problema. Sedaj naj bodo dane tako delilne točke (4.1), kot interpolacijske točke (4.11). Smeri tangent ne poznamo, želimo pa jih smiselno določiti za konstrukcijo  $C^1$  zveznega zleпка. Ena od možnosti je t.i. *Catmull-Romov<sup>2</sup> zlepek* [6]. Za (nenormirane) smeri tangent izberemo

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (4.16)$$

<sup>2</sup>Zlepek je znan tudi kot FMILL.

Robni tangenti določimo drugače, na primer po *Besselovi shemi*, ki jo bomo opisali v nadaljevanju. Ker je zlepek interpolacijski, se robne kontrolne točke ujemajo z interpolacijskimi, torej je spet  $\mathbf{b}_{3j} = \mathbf{p}_j$  in  $\mathbf{b}_{3j+3} = \mathbf{p}_{j+1}$ . Za notranje kontrolne točke pa izberemo

$$\mathbf{b}_{3j-1} = \mathbf{b}_{3j} - \frac{\Delta_{j-1}}{3(\Delta_{j-1} + \Delta_j)} \mathbf{d}_j,$$

$$\mathbf{b}_{3j+1} = \mathbf{b}_{3j} + \frac{\Delta_j}{3(\Delta_j + \Delta_{j+1})} \mathbf{d}_j.$$

Namesto tangent (4.16) lahko tangente izberemo po t. i. Besselovi shemi. Tangento tedaj v stični točki  $\mathbf{p}_j$  določimo tako, da določimo parabolo  $\mathbf{q}_j$  skozi tri sosednje interpolacijske točke  $\mathbf{p}_{j-1}$ ,  $\mathbf{p}_j$  in  $\mathbf{p}_{j+1}$ , na delilnih točkah  $u_{j-1}$ ,  $u_j$  in  $u_{j+1}$  ter jo odvajamo pri  $u_j$ . Torej

$$\mathbf{v}_j = \frac{d}{du} \mathbf{q}_j(u_j) = \frac{1 - \alpha_j}{\Delta_{j-1}} \Delta \mathbf{p}_{j-1} + \frac{\alpha_j}{\Delta_j} \Delta \mathbf{p}_j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$

kjer je

$$\alpha_j = \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_{j-1} + \Delta_j}.$$

V krajiščih pa izberemo

$$\mathbf{v}_0 := \frac{d}{du} \mathbf{q}_1(u_0) = \frac{2}{\Delta_0} \Delta \mathbf{p}_0 - \mathbf{v}_1, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{v}_N := \frac{d}{du} \mathbf{q}_{N-1}(u_N) = \frac{2}{\Delta_{N-1}} \Delta \mathbf{p}_{N-1} - \mathbf{v}_{N-1}, \quad (4.18)$$

Kontrolne točke posameznega segmenta potem dobimo iz (4.14) in (4.15).

Pravkar omenjene parabole lahko uporabimo tudi pri konstrukciji t.i. *Overhauserjevega zleпка* [21]. Pri tej konstrukciji  $j$ -ti segment zleпка definiramo z

$$\mathbf{s}_j(u) = \frac{u_{j+1} - u}{\Delta_j} \mathbf{q}_j(u) + \frac{u - u_j}{\Delta_j} \mathbf{q}_{j+1}(u), \quad j = 1, 2, \dots, N-2.$$

Na robovih pa postavimo  $\mathbf{s}_0(u) = \mathbf{q}_0(u)$  in  $\mathbf{s}_{N-1}(u) = \mathbf{q}_{N-1}(u)$ . Izkaže se, da v resnici Besselova in Overhauserjeva shema določata isti  $C^1$  zvezni kubični zlepek.

Med pomembnimi shemami je še Akimova [1]. Oglejmo si jo samo bežno. Tangentne vektorje izberemo na naslednji način

$$\mathbf{v}_j = (1 - c_j) \mathbf{a}_{j-1} + c_j \mathbf{a}_j,$$

kjer je  $\mathbf{a}_j = \Delta \mathbf{p}_j / \Delta_j$  in

$$c_j = \frac{\|\Delta \mathbf{a}_{j-2}\|}{\|\Delta \mathbf{a}_{j-2}\| + \|\Delta \mathbf{a}_j\|}.$$

## 4.6 $C^2$ zvezni kubični zleпки

V praksi imamo pogosto podane le interpolacijske točke (4.11). Delilne točke in smeri tangent pa moramo pogosto določiti sami. V prejšnjem razdelku smo si ogledali nekaj shem, s katerimi konstruiramo  $C^1$  zvezni kubični zlepek. Tu pa se bomo posvetili konstrukciji  $C^2$  zveznega zleпка. Smeri tangent pri tem ne potrebujemo, saj se "določijo same" tako, da je zlepek zvezen reda 2. Še vedno ostane problem izbire delilnih točk, a o tem bomo nekaj več v povedali v naslednjem razdelku. Privzemimo torej, da imamo poleg interpolacijskih točk podane tudi delilne točke. Kot vemo, lahko zlepek enolično določimo, če poznamo še odvode zleпка v delilnih točkah. Označimo jih kot v (4.13). Zapišimo  $j$ -ti segment  $\mathbf{s}_j$  zleпка  $\mathbf{s}$  v Bézierovi obliki in v lokalnem parametru  $t = (u - u_j) / \Delta_j$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_j(t) = & \mathbf{p}_j B_0^3(t) + \left( \mathbf{p}_j + \frac{1}{3} \Delta_j \mathbf{v}_j \right) B_1^3(t) \\ & + \left( \mathbf{p}_{j+1} - \frac{1}{3} \Delta_j \mathbf{v}_{j+1} \right) B_2^3(t) + \mathbf{p}_{j+1} B_3^3(t), \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Zaradi lastnosti interpolacije robnih točk so neposredno izpolnjeni interpolacijski pogoji (4.12), saj je

$$\mathbf{s}(u_j) = \mathbf{s}_j(0) = \mathbf{p}_j, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Po (4.3) in (3.5) pa za  $j = 1, 2, \dots, N-1$  velja še

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \mathbf{s}(u_j - 0) &= \frac{1}{\Delta_{j-1}} \mathbf{s}'_{j-1}(1) = \frac{1}{\Delta_{j-1}} \left( \mathbf{p}_j - \left( \mathbf{p}_j - \frac{1}{3} \Delta_{j-1} \mathbf{v}_j \right) \right) = \mathbf{v}_j, \\ \frac{d}{du} \mathbf{s}(u_j + 0) &= \frac{1}{\Delta_j} \mathbf{s}'_j(0) = \frac{1}{\Delta_j} \left( \mathbf{p}_j + \frac{1}{3} \Delta_j \mathbf{v}_j - \mathbf{p}_j \right) = \mathbf{v}_j, \end{aligned}$$

zato je zlepek  $\mathbf{s}$  vsaj  $C^1$  zvezen. Vektorji  $\mathbf{v}_j$  so še poljubni. Določili jih bomo tako, da bo zlepek  $\mathbf{s}$  postal  $C^2$  zvezen. Očitno moramo zadostiti še pogojem

$$\frac{d^2}{du^2} \mathbf{s}(u_j - 0) = \frac{d^2}{du^2} \mathbf{s}(u_j + 0), \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Podobno kot zgoraj se zadnje enakosti po (4.3) in (3.5) izražajo kot

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_{j-1}^2} s_{j-1}''(1) &= \frac{6}{\Delta_{j-1}^2} \left( \frac{1}{3} \Delta_{j-1} \mathbf{v}_{j-1} + \frac{2}{3} \Delta_{j-1} \mathbf{v}_j - \Delta \mathbf{p}_{j-1} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta_j^2} s_j''(0) = \frac{6}{\Delta_j^2} \left( -\frac{2}{3} \Delta_j \mathbf{v}_j - \frac{1}{3} \Delta_j \mathbf{v}_{j+1} + \Delta \mathbf{p}_j \right), \end{aligned}$$

oziroma

$$\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1} + \Delta_j} \mathbf{v}_{j-1} + 2 \mathbf{v}_j + \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_{j-1} + \Delta_j} \mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{b}_j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.20)$$

kjer je

$$\mathbf{b}_j = \frac{3}{\Delta_{j-1} + \Delta_j} \left( \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \Delta \mathbf{p}_{j-1} + \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j} \Delta \mathbf{p}_j \right).$$

Enačbe (4.20) predstavljajo sistem  $N-1$  (vektorskih) linearnih enačb za  $N-1$  neznanih vektorjev  $\mathbf{v}_j, j = 1, 2, \dots, N-1$ . V matrični obliki ga lahko zapišemo kot  $AV = B$ , kjer je

$$A = \text{tridiag} \left( \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1} + \Delta_j}, 2, \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_{j-1} + \Delta_j} \right)_{j=1}^{N-1} \quad (4.21)$$

in

$$V = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{N-1}^T \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{N-1}^T \end{pmatrix}.$$

Matrika  $A$  je diagonalno dominantna po vrsticah, saj je

$$\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1} + \Delta_j} + \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_{j-1} + \Delta_j} = 1 < 2,$$

zato ima sistem (4.20) natanko eno rešitev. To pomeni, da obstajajo enolično določeni vektorji  $\mathbf{v}_j, j = 1, 2, \dots, N-1$ , ki določajo segmente  $\mathbf{s}_j, j = 1, 2, \dots, N-1$ , zleпка  $\mathbf{s}$ . Odvoda  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{s}'(u_0)$  in  $\mathbf{v}_N = \mathbf{s}'(u_N)$  lahko določimo poljubno. Lahko pa sistemu (4.20) dodamo še dve linearno neodvisni enačbi, ki vsebujeta neznan odvoda  $\mathbf{v}_0$  in  $\mathbf{v}_N$ . Glede na to izbiro so najpomembnejši tipi  $C^2$  zveznih kubičnih Bézierovih zlepkov naslednji:

- *Besselov zlepek*: Odvoda v krajiščih določimo po (4.17) in (4.18).

- “Ne vozeli” zlepek: Odvoda v krajiščih določimo tako, da je zlepek  $\mathbf{s}$  v  $u_1$  in  $u_{N-1}$  trikrat zvezno odvedljiv. To pomeni, da segmenta  $\mathbf{s}_0$  in  $\mathbf{s}_1$  predstavljata isto kubično krivuljo (enako velja za segmenta  $\mathbf{s}_{N-2}$  in  $\mathbf{s}_{N-1}$ ).
- Naravni zlepek: Namesto prvih odvodov v krajišču predpišemo  $\mathbf{s}''(u_0 + 0) = \mathbf{s}(u_N - 0) = \mathbf{0}$ .
- Priodlični zlepek: Prva in zadnja interpolacijska točka sta enaki. Zlepek  $\mathbf{s}$  ima v prvi in zadnji delilni točki tudi enaka prvi in drugi odvod.

Naravni zlepek da tudi naslednjo motivacijo za alternativno konstrukcijo  $C^2$  zleпка. Namesto da so v delilnih točkah neznani prvi odvodi, izberemo za neznanke druge odvode, torej  $\mathbf{w}_j := \mathbf{s}''(u_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ . Označimo kontrolne točke  $j$ -tega segmenta z  $\mathbf{b}_{3j+k}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . Podobno kot pri izpeljavi enačb s prvimi odvodi iz (4.3) in (3.5) dobimo

$$\begin{aligned}\mathbf{s}''(u_j) &= \mathbf{w}_j = \frac{6}{\Delta_j^2} (\mathbf{b}_{3j} - 2\mathbf{b}_{3j+1} + \mathbf{b}_{3j+2}) \\ \mathbf{s}''(u_{j+1}) &= \mathbf{w}_{j+1} = \frac{6}{\Delta_j^2} (\mathbf{b}_{3j+1} - 2\mathbf{b}_{3j+2} + \mathbf{b}_{3j+3}).\end{aligned}$$

Ker je zlepek interpolacijski, je  $\mathbf{b}_{3j} = \mathbf{p}_j$ ,  $\mathbf{b}_{3j+3} = \mathbf{p}_{j+1}$  in zgornji sistem za  $\mathbf{b}_{3j+1}$  ter  $\mathbf{b}_{3j+2}$  ima rešitev

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{3j+1} &= \frac{2\mathbf{p}_j + \mathbf{p}_{j+1}}{3} - \frac{\Delta_j^2}{18} (2\mathbf{w}_j + \mathbf{w}_{j+1}), \\ \mathbf{b}_{3j+2} &= \frac{\mathbf{p}_j + 2\mathbf{p}_{j+1}}{3} - \frac{\Delta_j^2}{18} (\mathbf{w}_j + 2\mathbf{w}_{j+1}).\end{aligned}$$

Zato  $j$ -ti segment zleпка  $\mathbf{s}_j$  lokalno lahko zapišemo v obliki

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_j(t) &= \mathbf{p}_j B_0^3(t) + \left( \frac{2\mathbf{p}_j + \mathbf{p}_{j+1}}{3} - \frac{\Delta_j^2}{18} (2\mathbf{w}_j + \mathbf{w}_{j+1}) \right) B_1^3(t) \\ &\quad + \left( \frac{\mathbf{p}_j + 2\mathbf{p}_{j+1}}{3} - \frac{\Delta_j^2}{18} (\mathbf{w}_j + 2\mathbf{w}_{j+1}) \right) B_2^3(t) + \mathbf{p}_{j+1} B_3^3(t).\end{aligned}$$

Toda zagotoviti je treba še  $C^1$  zveznost, zato mora za notranje delilne točke veljati  $\mathbf{s}'(u_j - 0) = \mathbf{s}'(u_j + 0)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N - 1$ . Nekaj računanja nas

pripelje do naslednjega sistema linearnih enačb

$$\frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_{j-1} + \Delta_j} \mathbf{w}_{j-1} + 2\mathbf{w}_j + \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1} + \Delta_j} \mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{c}_j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.22)$$

kjer je

$$\mathbf{c}_j = 6 \frac{\frac{1}{\Delta_j} \Delta \mathbf{p}_j - \frac{1}{\Delta_{j-1}} \Delta \mathbf{p}_{j-1}}{\Delta_{j-1} + \Delta_j}.$$

sistem je ponovno diagonalno dominanten, zato ima enolično rešitev za neznanе vektorej  $\mathbf{w}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N-1$ . Podobno kot v primeru prvih odvodov, moramo dodati še dva linearno neodvisna pogoja za druga odvoda v robnih delilnih točkah. Če ju postavimo na nič, dobimo na primer naravni zlepek.

## 4.7 Izbira delilnih točk

V prejšnjih razdelkih smo videli, da za delilne točke lahko izberemo poljubno naraščajoče zaporedje realnih števil. Ker pa delilne točke vplivajo na obliko  $C^1$  ali  $C^2$  zveznega kubičnega zlepka, je naravno vprašanje, kako jih smiselno izbrati. Odgovor nanj ni enostaven, saj kriteriji za obliko zlepka večinoma niso jasno postavljeni. Odvisni so od ozadja problema v katerem nastopajo zlepki, velikokrat pa tudi od subjektivne presoje oblikovalca, ki jih uporablja za konstrukcijo gladkih krivulj. Kljub temu pa je dokaj hitro jasno, da morajo biti delilne točke vsaj v majhni meri povezane z geometrijo točk. Tak razmislek nam da naslednjo idejo za izbor delilnih točk (ali kot rečemo na kratko, za parametrizacijo zlepka).

**DEFINICIJA 4.7.1** Če za interpolacijske točke  $\mathbf{p}_j \in \mathbb{E}^d$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , izberemo delilne točke kot

$$u_{j+1} = u_j + \|\Delta \mathbf{p}_j\|^\alpha, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad \alpha \in [0, 1], \quad (4.23)$$

potem pravimo, da smo izbrali t.i.  $\alpha$ -parametrizacijo. Začetna delilna točka  $u_0$  je poljubna, ponavadi jo postavimo na 0.

Včasih delilne točke iz zadnje definicije še normiramo, jih delimo s konstanto tako, da je na primer  $u_N = 1$ . Parameter  $\alpha$ , po katerem se imenujejo pravkar definirane parametrizacije je omejen na enotski interval. To ni nujno, vendar praktični primeri kažejo, da je omejitev smiselna. Najbolj znane parametrizacije tega tipa so:

- enakomerna,  $\alpha = 0$ ,
- centripetalna,  $\alpha = 1/2$ ,
- tetivna,  $\alpha = 1$ .

Nobena od parametrizacij se žal ne izkaže kot idealna za vse nabore interpolacijskih točk. Zato je izbira takega tipa parametrizacije odvisna od primera do primera.

Med bolj znanimi parametrizacijami je tudi t.i. *Foleyeva* [20]. Pri tej izberemo

$$\Delta_j = \|\Delta \mathbf{p}_j\| \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\tilde{\theta}_j \|\Delta \mathbf{p}_{j-1}\|}{\|\Delta \mathbf{p}_{j-1}\| + \|\Delta \mathbf{p}_j\|} + \frac{3}{2} \frac{\tilde{\theta}_{j+1} \|\Delta \mathbf{p}_{j+1}\|}{\|\Delta \mathbf{p}_j\| + \|\Delta \mathbf{p}_{j+1}\|} \right),$$

kjer je

$$\tilde{\theta}_j = \min \left\{ \pi - \theta_j, \frac{\pi}{2} \right\}$$

in  $\theta_j$  kot med vektorjema  $\Delta \mathbf{p}_{j-1}$  in  $\Delta \mathbf{p}_j$ .

Med vsemi omenjenimi parametrizacijami je samo enakomerna invariantna na afine transformacije. Vse druge vsebujejo dolžine vektorjev, ki pa na take transformacije niso (v splošnem) invariantne.

Eden od smiselnih kriterijev za "kakovost" izbire parametrizacije je naslednji. Za dano zaporedje interpolacijskih točk (4.11) in izbrano  $\alpha$ -parametrizacijo (4.23) nas zanima, kako daleč se odmakne interpolacijski Bézierov kubični zlepek (4.12). Pri tem odmik merimo kot razdaljo med daljico med točkama  $\mathbf{p}_j$  in  $\mathbf{p}_{j+1}$  ter ustreznim segmentom  $\mathbf{s}_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$ . Na oba objekta lahko gledamo kot na parametrični krivulji. Razdalja med njima je razdalja med množicama točk, ki sta sliki obeh krivulj, torej znana *Hausdorffova razdalja*. Formalno jo definiramo takole.

DEFINICIJA 4.7.2 Naj bosta  $\mathbf{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^d$  in  $\mathbf{g} : [c, d] \rightarrow \mathbb{E}^d$  dve parametrični krivulji. Potem je Hausdorffova razdalja med njima enaka

$$d_H(\mathbf{f}, \mathbf{g}) := \max \left\{ \sup_{t \in [a, b]} \inf_{u \in [c, d]} \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(u)\|, \sup_{u \in [c, d]} \inf_{t \in [a, b]} \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(u)\| \right\}.$$

V praksi jo je težko (tudi samo približno) učinkovito računati, zato pogosto za mero oddaljenosti dveh krivulj izberemo *parametrično razdaljo* [19].

DEFINICIJA 4.7.3 Naj bosta  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{g}$  taki kot v definiciji 4.7.2 in  $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$  poljubna zvezna naraščajoča funkcija. Parametrična razdalja med  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{g}$  je

$$d_P(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \inf_{\phi} \sup_{t \in [a, b]} \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(\phi(t))\|.$$



Parametrizacija	$\max_{0 \leq j \leq N-1} \mu_j$	$\mu$
Enakomerna	$\infty$	$\leq 3/4$
Centripetalna	$3/4$	$\leq 9/20$
Tetivna	$3/4$	$3/4$

Tabela 4.1: Primerjava lokalnih in globalnih odmikov periodičnega kubičnega zlepka za različne  $\alpha$ -parametrizacije.

Očitno velja, da je

$$d_H(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \leq d_P(\mathbf{f}, \mathbf{g}). \quad (4.24)$$

Če označimo z  $[\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_{j+1}]$  daljico med točkama  $\mathbf{p}_j$  in  $\mathbf{p}_{j+1}$ , lahko *lokalni odmik* segmenta  $\mathbf{s}_j$  zlepka  $\mathbf{s}$  na intervalu  $[u_j, u_{j+1}]$  definiramo kot

$$\mu_j := \mu_j(\mathbf{s}) = \frac{d_H(\mathbf{s}_j, [\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_{j+1}])}{\|\Delta \mathbf{p}_j\|}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.25)$$

*globalni odmik* pa kot

$$\mu := \mu(\mathbf{s}) = \frac{\max_{0 \leq j \leq N-1} d_H(\mathbf{s}_j, [\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_{j+1}])}{\max_{0 \leq j \leq N-1} \|\Delta \mathbf{p}_j\|}. \quad (4.26)$$

V praksi ponavadi želimo, da interpolacijski zlepek ne bo imel prevelikih lokalnih in globalnega odmika, torej majhno vrednost  $\mu_j$  in  $\mu$ . Problem je za periodične kubične zlepke podrobno obravnavan v [12]. Rezultati so povzeti v tabeli 4.1 in kažejo, da je glede na to mero kakovosti zlepka najprimernejša centripetalna parametrizacija.

Za zaključek razdelka si oglejmo nekoliko lažji primer študija odmikov, in sicer odmike kvadratnega Bézierovega interpolanta (ne zlepka) glede na poljubno  $\alpha$ -parametrizacijo od poligona interpolacijskih točk.

**PRIMER 4.7.1** Dane so tri točke  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{E}^d$ . Izberimo interpolacijske parametre (4.23) in jih utežimo tako (torej delimo z  $\Delta u_0 + \Delta u_1$ ), da bo  $u_0 = 0$  in  $u_2 = 1$ . Poiščimo kvadratno Bézierovo krivuljo  $\mathbf{b}$ , za katero je

$$\mathbf{b}(u_j) = \mathbf{p}_j, \quad j = 0, 1, 2.$$

Vemo, da je

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_2 B_0^2(t) + \mathbf{b}_1 B_1^2(t) + \mathbf{b}_2 B_2^2(t),$$

kjer je  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{p}_0$  in  $\mathbf{b}_2 = \mathbf{p}_2$ . Ker sta primera odmikov na prvem in drugem segmentu simetrična, si oglejmo samo prvega. Zaradi interpolacije točke  $\mathbf{p}_1$  pri  $u_1$  je

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{B_1^2(u_1)} \left( \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 B_0^2(u_1) - \mathbf{p}_2 B_2^2(u_1) \right).$$

Označimo z  $\ell_0$  daljico med točkama  $\mathbf{p}_0$  in  $\mathbf{p}_1$ , parametrizirano na intervalu  $[0, u_1]$  in z  $\mathbf{c}$  del Bézierove krivulje na intervalu  $[0, u_1]$ . Po definiciji 4.7.3 je

$$d_H(\mathbf{c}, \ell_0) \leq \max_{u \in [0, u_1]} \|\mathbf{c}(u) - \ell_0(u)\|.$$

Krivuljo  $\mathbf{c}$  in daljico  $\ell_0$  lahko na  $[0, 1]$  predstavimo kot kvadratni Bézierovi krivulji. Prvo s pomočjo de Casteljauove sheme, drugo z dvigom stopnje. Dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t) &= \mathbf{p}_0 B_0^2(t) + ((1 - u_1) \mathbf{p}_0 + u_1 \mathbf{b}_1) B_1^2(t) + \mathbf{p}_1 B_2^2(t), \\ \ell_0(t) &= \mathbf{p}_0 B_0^2(t) + \frac{1}{2} (\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1) B_1^2(t) + \mathbf{p}_1 B_2^2(t). \end{aligned}$$

Torej je

$$d_H(\mathbf{c}, \ell_0) \leq \left\| u_1 \mathbf{b}_1 - u_1 \mathbf{p}_0 - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{p}_0 \right\| \max_{t \in [0, 1]} B_1^2(t).$$

Iz (4.23) in dejstva, da smo parametre normirali na  $[0, 1]$ , sledi

$$u_1 = \frac{\|\Delta \mathbf{p}_0\|}{\|\Delta \mathbf{p}_0\| + \|\Delta \mathbf{p}_1\|}.$$

Upoštevamo še  $\max_{t \in [0, 1]} B_1^2(t) = 1/2$  in z nekaj računanja dobimo

$$d_H(\mathbf{c}, \ell_0) \leq \frac{1}{4} \|\Delta \mathbf{p}_0\|^{2\alpha} \frac{\|\Delta \mathbf{p}_0\|^{1-\alpha} + \|\Delta \mathbf{p}_1\|^{1-\alpha}}{\|\Delta \mathbf{p}_0\|^\alpha + \|\Delta \mathbf{p}_1\|^\alpha},$$

oziroma

$$\mu_0 \leq \frac{1}{4} \frac{1 + \left( \frac{\|\Delta \mathbf{p}_1\|}{\|\Delta \mathbf{p}_0\|} \right)^{1-\alpha}}{1 + \left( \frac{\|\Delta \mathbf{p}_1\|}{\|\Delta \mathbf{p}_0\|} \right)^\alpha}.$$

Zaradi simetrije je tudi

$$\mu_1 \leq \frac{1}{4} \frac{1 + \left( \frac{\|\Delta \mathbf{p}_0\|}{\|\Delta \mathbf{p}_1\|} \right)^{1-\alpha}}{1 + \left( \frac{\|\Delta \mathbf{p}_0\|}{\|\Delta \mathbf{p}_1\|} \right)^\alpha}.$$

Hitro se lahko prepričamo, da je  $\mu_j \leq 1/2$  za  $\alpha \geq 1/2$ . Posebej je za tetivno parametrizacijo  $\mu_j \leq 1/2$  in za centripetalno  $\mu_j \leq 1/4$ .

Za  $\alpha < 1/2$  ja je lahko lokalni odmik neomejen, kar pokaže ravninski primer točk  $\mathbf{p}_0 = (0, 0)^T$ ,  $\mathbf{p}_1 = (\epsilon, 0)^T$ ,  $\mathbf{p}_2 = (\epsilon, -1)^T$  in  $\epsilon > 0$ . Ko gre  $\epsilon$  proti 0, lokalni odmik  $\mu_0$  raste čez vse meje.

Brez formalne utemeljitve omenimo še, da je  $\mu < 1/2$  za vsak  $\alpha \in [0, 1]$ .

# Poglavje 5

## Geometrijsko zvezne krivulje

V prejšnjih poglavjih smo se ukvarjali predvsem s konstrukcijo  $C^k$  zveznih parametričnih krivulj. Pri tem smo zahtevali, da so komponente parametrične krivulje  $k$ -krat zvezno odvedljive funkcije. Takim funkcijam ponavadi pravimo tudi gladke funkcije. Medtem ko je zveznost za krivulje in funkcije popolnoma ekvivalenten pojem, to ni več res za gladkost višjega reda. Izkaže se, da pojma "gladkosti" in zveznosti višjih odvodov komponent krivulje v splošnem nista več ekvivalentna. Za motivacijo si oglejmo naslednji primer.

PRIMER 5.0.2 Naj bo  $\mathbf{s} : [u_0, u_2] \rightarrow \mathbb{E}^2$ ,  $u_0 < u_1 < u_2$ , zlepek dveh kvadratnih Bézierovih krivulj  $\mathbf{s}_0$  in  $\mathbf{s}_1$ , definiranih v lokalnih parametrih kot

$$\mathbf{s}_0(t) = \mathbf{p}_0 B_0^2(t) + \mathbf{p}_1 B_1^2(t) + \mathbf{p}_2 B_2^2(t), \quad t = \frac{u - u_0}{\Delta_0},$$

$$\mathbf{s}_1(t) = \mathbf{p}_1 B_0^2(t) + \mathbf{p}_2 B_1^2(t) + \mathbf{p}_3 B_2^2(t), \quad t = \frac{u - u_1}{\Delta_1},$$

kjer so  $\mathbf{p}_0 = (0, -2)^T$ ,  $\mathbf{p}_1 = (0, 0)^T$  in  $\mathbf{p}_2 = (2, 0)^T$  interpolacijske točke. Očitno je

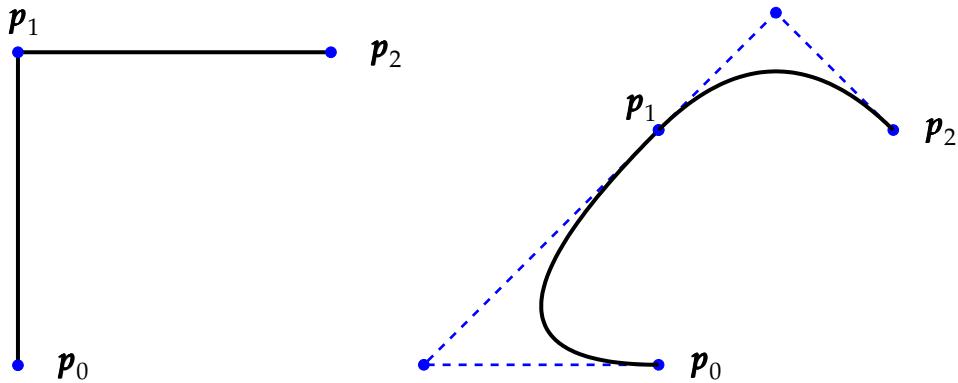
$$\frac{d}{du} \mathbf{s}(u_1 - 0) = \frac{1}{\Delta_0} \frac{d}{dt} \mathbf{s}_0(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_1} \frac{d}{dt} \mathbf{s}_1(0) = \frac{d}{du} \mathbf{s}(u_1 + 0),$$

zato je zlepek  $\mathbf{s} \in C^1$  zvezen na  $[u_0, u_2]$ . Toda iz slike 5.1 je razvidno, da ima  $\mathbf{s}$  kot geometrijski objekt v koordinatnem izhodišču vogal.

Naj bo sedaj  $\mathbf{s}$  definiran nad isto domeno, njegova segmenta pa

$$\mathbf{s}_0(t) = \mathbf{p}_0 B_0^2(t) + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} B_1^2(t) + \mathbf{p}_2 B_2^2(t), \quad t = \frac{u - u_0}{\Delta_0}, \quad (5.1)$$

$$\mathbf{s}_1(t) = \mathbf{p}_1 B_0^2(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} B_1^2(t) + \mathbf{p}_3 B_2^2(t), \quad t = \frac{u - u_1}{\Delta_1}. \quad (5.2)$$



Slika 5.1: Zvezno odvedljiva krivulja v točki  $p_0$  ima lahko špico (levo), lahko pa je na pogled gladka v  $p_0$ , a ni zvezno odvedljiva (desno).

Za odvod v delilni točki  $u_1$  sedaj dobimo

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\mathbf{s}(u_1 - 0) &= \frac{1}{\Delta_0} \frac{d}{dt}\mathbf{s}_0(1) = \frac{1}{\Delta_0} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \\ \frac{d}{du}\mathbf{s}(u_1 + 0) &= \frac{1}{\Delta_1} \frac{d}{dt}\mathbf{s}_1(0) = \frac{1}{\Delta_1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Torej bo krivulja v stični točki  $u_1$  zvezno odvedljiva samo v primeru, ko bo  $\Delta_0 = 2\Delta_1$ .

Prejšnji primer pokaže, da imamo lahko krivulje, ki so formalno zvezno odvedljive v neki točki, pa imajo tam špico, ali pa so geometrijsko gladke v neki točki, pa tam niso formalno zvezno odvedljive. Videli bomo, da se takim primerom lahko izognemo, če ne dopuščamo ničelnih tangentialnih vektorjev (regularna krivulja), ali pa krivuljo ustrezno reparametriziramo, da postane formalno gladka.

## 5.1 Definicija geometrijske zveznosti

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj ekvivalentnih definicij t.i. geometrijske zveznosti. Začnimo z osnovno.

DEFINICIJA 5.1.1 Naj bosta  $\mathbf{s}_0 : [u_0, u_1] \rightarrow \mathbb{E}^d$  in  $\mathbf{s}_1 : [u_1, u_2] \rightarrow \mathbb{E}^d$  taka vsaj  $k$ -krat zvezno odvedljiva regularna segmenta parametrične krivulje  $\mathbf{s} : [u_0, u_2] \rightarrow$

$\mathbb{E}^d$ , da je  $\mathbf{s}|_{[u_j, u_{j+1}]} = \mathbf{s}_j$ ,  $j = 0, 1$ . Privzemimo, da je  $\mathbf{s}$  zvezna v točki  $u_1$ , torej  $\mathbf{p} := \mathbf{s}_0(u_1) = \mathbf{s}_1(u_1)$ . Krivulja  $\mathbf{s}$  je v točki  $\mathbf{p}$  geometrijsko zvezna reda  $k$  ( $G^k$  zvezna), če obstaja taka regularna gladka bijektivna reparametrizacija  $\rho : [v_0, v_1] \rightarrow [u_0, u_1]$ ,  $\rho'(v_1) > 0$ , da je

$$\frac{d^\ell}{du^\ell} \mathbf{s}_1(u_1) = \frac{d^\ell}{dt^\ell} (\mathbf{s}_0(\rho(v_1))), \quad \ell = 1, 2, \dots, k.$$

Preprosteje lahko definicijo povzamemo takole: krivulja je  $G^k$  zvezna, če je  $C^k$  zvezna v neki reparametrizaciji. Mnogi avtorji definirajo  $G^k$  zveznost tako, da za parametrizacijo, v kateri je krivulja  $C^k$  zvezna, zahtevajo, da je naravna.

DEFINICIJA 5.1.2 Za gladko parametrično krivuljo  $\mathbf{s} : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^d$ , definirano glede na parameter  $t \in [a, b]$ , je naravni parameter  $s$  definiran kot

$$\eta(t) = \int_a^t \|\mathbf{s}'(\tau)\| d\tau. \quad (5.3)$$

Ker sta v praksi najpomembnejši  $G^1$  in  $G^2$  zveznosti, si ju pogledjmo podrobneje. Iz definicije 5.1.1 izluščimo, da mora za  $G^1$  zveznost veljati

$$\frac{d}{du} \mathbf{s}_1(u_1) = \rho'(t_1) \frac{d}{du} \mathbf{s}_0(u_1). \quad (5.4)$$

Ker je po definiciji  $\rho'(t_1) > 0$ , se od tod hitro vidi, da sta enotska tangenta vektorja na  $\mathbf{s}_0$  in  $\mathbf{s}_1$  v točki  $\mathbf{p}$  enaka. Geometrijska zveznost reda 1 je torej ekvivalentna zveznosti enotske tangente.

PRIMER 5.1.1 Vrnimo se k drugi krivulji iz primera 5.0.2. Izberimo konkretno parametrizacijo, ki ne izpolnjuje pogoja za  $C^1$  zveznost, na primer  $u_j = j$ ,  $j = 0, 1, 2$ . Segment  $\mathbf{s}_0$  reparametrizirajmo s parametrizacijo  $\rho : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $\rho(v) = (v + 1)/2$ . Potem je za  $v \in [-1, 1]$

$$\mathbf{s}_0(\rho(v)) = \mathbf{p}_0 B_0^2((v + 1)/2) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} B_1^2((v + 1)/2) + \mathbf{p}_1 B_2^2((v + 1)/2)$$

ter

$$\frac{d}{du} \mathbf{s}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \rho'(1) \frac{d}{du} \mathbf{s}_0(1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

in krivulja je res  $G^1$  zvezna.

Podobno lahko raziščemo pogoje za  $G^2$  zveznost. Ker mora biti po definiciji 5.1.1 vsaka  $G^2$  zvezna krivulja najprej  $G^1$  zvezna, mora veljati (5.4). Seveda je reparametrizacija  $\rho$  za vsak red zveznosti ista, zato dobimo še pogoj

$$\frac{d^2}{du^2}\mathbf{s}_1(u_1) = \rho'(v_1)^2 \frac{d^2}{du^2}\mathbf{s}_0(u_1) + \rho''(v_1) \frac{d}{du}\mathbf{s}_0(u_1). \quad (5.5)$$

Izpeljali smo torej naslednje ekvivalentne pogoje  $G^1$  in  $G^2$  zveznosti.

LEMA 5.1.1 Naj bodo  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{s}_0$  in  $\mathbf{s}_1$  krivulje iz definicije 5.1.1. Krivulja  $\mathbf{s}$  je v točki  $\mathbf{p}$   $G^1$  zvezna, če obstaja tak  $\alpha > 0$ , da je

$$\frac{d}{du}\mathbf{s}_1(u_1) = \alpha \frac{d}{du}\mathbf{s}_0(u_1). \quad (5.6)$$

V isti točki je tudi  $G^2$  zvezna, če poleg (5.6) velja še

$$\frac{d^2}{du^2}\mathbf{s}_1(u_1) = \alpha^2 \frac{d^2}{du^2}\mathbf{s}_0(u_1) + \beta \frac{d}{du}\mathbf{s}_0(u_1), \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (5.7)$$

Zgornja dva primera namigujeta na novo splošno definicijo  $G^k$  zveznosti.

DEFINICIJA 5.1.3 Naj bodo  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{s}_0$  in  $\mathbf{s}_1$  ponovno krivulje iz definicije 5.1.1. Krivulja  $\mathbf{s}$  je v točki  $\mathbf{p}$  zvezna, če obstaja spodnje trikotna matrika  $B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ , da velja

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{du}\mathbf{s}_1(u_1) \\ \frac{d^2}{du^2}\mathbf{s}_1(u_1) \\ \vdots \\ \frac{d^k}{du^k}\mathbf{s}_1(u_1) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \frac{d}{du}\mathbf{s}_0(u_1) \\ \frac{d^2}{du^2}\mathbf{s}_0(u_1) \\ \vdots \\ \frac{d^k}{du^k}\mathbf{s}_0(u_1) \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

kjer je

$$\beta_{ii} = \frac{d}{du}\mathbf{s}_0(u_1)^i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Matriki  $B$  rečemo povezovalna matrika. Njene elemente se dobi po t.i. Faà di Brunovih<sup>1</sup> formulah za odvod sestavljene funkcije.

<sup>1</sup>Francesco Faà di Bruno, 1825–1888, italijanski matematik.

Več o povezovalni matriki najdemo v [15] in [14]. O geometrijski zveznosti pa še v [3] in [2].

Za ravninske krivulje je  $G^2$  zveznost ekvivalentna zveznosti enotske tangente in (fleksijske) ukrivljenosti. Za prostorske krivulje (in posledično za krivulje v več dimenzijah) pa to ni več res. Vsaka  $G^3$  zvezna krivulja ima zvezno enotsko tangento ter fleksijsko in torzijsko ukrivljenost. Obstajajo pa prostorske krivulje, ki imajo zvezno enotsko tangento ter obe ukrivljenosti, pa niso  $G^3$ . Podrobnosti najdemo v [8]. Pokažimo torej ekvivalentnost za ravninske krivulje.

LEMA 5.1.2 *Ravninska parametrična krivulja  $\mathbf{s}$  je v točki  $\mathbf{p} = \mathbf{s}(u)$   $G^2$  zvezna natanko tedaj, ko ima zvezno enotsko tangento in ukrivljenost.*

DOKAZ. Privzemimo, da je  $\mathbf{s}$  definirana v okolici parametra  $u_1$ , torej vsaj na intervalu  $[u_1 - \varepsilon, u_1 + \varepsilon]$ . Naj krivuljo  $\mathbf{s}$  na  $[u_1 - \varepsilon, u_1]$  določa krivulja  $\mathbf{s}_0$ , na  $[u_1, u_1 + \varepsilon]$  pa krivulja  $\mathbf{s}_1$ , obe parametrizirani v istem parametru  $u \in [u_1 - \varepsilon, u_1 + \varepsilon]$ .

Privzemimo najprej, da je  $\mathbf{s}$   $G^2$  zvezna v točki  $\mathbf{p}$ . Po definiciji je v tej točki zvezna, zato je  $\mathbf{s}_0(u_1) = \mathbf{s}_1(u_1) = \mathbf{p}$ . Dokazati moramo, da je enotska tangenta na  $\mathbf{s}_0$  v  $\mathbf{p}$ , enaka enotski tangenti na  $\mathbf{s}_1$  v  $\mathbf{p}$ . Po (5.6) imata krivulji v  $\mathbf{p}$  isto smer tangente, torej enako enotsko tangento. Zveznost ukrivljenosti preverimo takole. Zaradi krajše pisave označimo odvajanje po parametru  $u$  s črtico in ukrivljenost krivulje  $\mathbf{s}_j$  v točki  $\mathbf{p}$  z  $\kappa_j(u_1)$ ,  $j = 0, 1$ . Tedaj je po (2.1.4)

$$\kappa_1(u_1) = \frac{\mathbf{s}'_1(u_1) \times \mathbf{s}''_1(u_1)}{\|\mathbf{s}'_1(u_1)\|^3}.$$

Toda po (5.6) in (5.7) jo zapišemo lahko tudi kot

$$\begin{aligned} \kappa_1(u_1) &= \frac{\alpha \mathbf{s}'_0(u_1) \times (\alpha^2 \mathbf{s}''_0(u_1) + \beta \mathbf{s}'_0(u_1))}{\|\alpha \mathbf{s}'_0(u_1)\|^3} \\ &= \frac{\alpha^3 \mathbf{s}'_0(u_1) \times \mathbf{s}''_0(u_1) + \alpha \beta \mathbf{s}'_0(u_1) \times \mathbf{s}'_0(u_1)}{\alpha^3 \|\mathbf{s}'_0(u_1)\|^3} = \kappa_2(u_1) \end{aligned}$$

in dokaz v eno smer je končan.

Naj ima sedaj  $\mathbf{s}$  zvezno smer tangente in zvezno ukrivljenost v točki  $\mathbf{p}$ . Potem je

$$\frac{1}{\|\mathbf{s}'_0(u_1)\|} \mathbf{s}'_0(u_1) = \frac{1}{\|\mathbf{s}'_1(u_1)\|} \mathbf{s}'_1(u_1).$$

Če za  $\alpha$  izberemo

$$\alpha = \frac{\|\mathbf{s}'_1(u_1)\|}{\|\mathbf{s}'_0(u_1)\|} > 0,$$



smo izpolnili zahtevo (5.6) za  $G^1$  zveznost. Ohranimo izbrani  $\alpha$ . Iz zveznosti ukrivljenosti  $\kappa_0(u_1) = \kappa_1(u_1)$  sledi  $\mathbf{s}_1''(u_1) \times \mathbf{s}_0'(u_1) = \alpha^2 \mathbf{s}_0''(u_1) \times \mathbf{s}_0'(u_1)$ , oziroma  $\mathbf{s}_0'(u_1) \times (\mathbf{s}_1''(u_1) - \alpha^2 \mathbf{s}_0''(u_1)) = \mathbf{0}$ . Ker je planarni vektorski produkt dveh ravninskih vektorjev nič natanko tedaj, ko sta vzporedna, mora biti

$$\mathbf{s}_1''(u_1) - \alpha^2 \mathbf{s}_0''(u_1) = \beta \mathbf{s}_0'(u_1), \quad \beta \in \mathbb{R},$$

kar je ravno pogoj za  $G^2$  zveznost.  $\square$

## 5.2 $G$ zveznost ravninskih Bézierovih krivulj

V prejšnjem razdelku smo podali karakterizacijo  $G$  zveznosti za poljuben razred polinomskih parametričnih krivulj. Tukaj se bomo omejili samo na Bézierove krivulje. Naj bosta torej  $\mathbf{s}_0'[u_0, u_1] \rightarrow \mathbb{E}^d$  in  $\mathbf{s}_1 : [u_1, u_2] \rightarrow \mathbb{E}^d$ ,  $u_0 < u_1 < u_2$ , Bézierovi krivulji stopnje  $n$ , ki nad  $[u_0, u_1, u_2]$  določata Bézierov zlepek  $\mathbf{s} : [u_0, u_2] \rightarrow \mathbb{E}^d$ . Privzemimo, da je zlepek vsaj zvezen. Torej lahko segmenta v lokalnih parametrih zapišemo kot

$$\mathbf{s}_0(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t), \quad \mathbf{s}_1(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{n+j} B_j^n(t).$$

Če želimo, da bo  $\mathbf{s}$   $G^1$  zvezna v delilni točki  $u_1$ , mora biti po (5.6)

$$\frac{n}{\Delta_1} \Delta \mathbf{b}_n = \alpha \frac{n}{\Delta_0} \Delta \mathbf{b}_{n-1}, \quad \alpha > 0,$$

oziroma

$$\Delta \mathbf{b}_n = \alpha_1 \Delta \mathbf{b}_{n-1}, \quad \alpha_1 = \alpha \frac{\Delta_1}{\Delta_0} > 0. \quad (5.9)$$

Torej je

$$\mathbf{b}_n = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} \mathbf{b}_{n-1} + \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} \mathbf{b}_{n+1}, \quad \alpha_1 = \alpha \frac{\Delta_1}{\Delta_0} > 0.$$

Geometrijsko to pomeni, da mora biti točka  $\mathbf{b}_n$  konveksna kombinacija točk  $\mathbf{b}_{n-1}$  in  $\mathbf{b}_{n+1}$ .

Ker mora biti  $G^2$  zvezna krivulja po definiciji tudi  $G^1$  zvezna, pred obravnavo pogoja  $G^2$  zveznosti predpostavimo, da je krivulja  $\mathbf{s}$  v delilni točki  $u_1$  že kar  $C^1$  zvezna (sicer izberemo ustrezno zaporedje delilnih točk, da

je parameter  $\alpha$  iz pogoja  $G^1$  zveznosti enak 1). Pogoj  $G^2$  zveznosti sedaj prepisemo v

$$\frac{6}{\Delta_1^2} (\Delta \mathbf{b}_{n+1} - \Delta \mathbf{b}_n) = \frac{6}{\Delta_0^2} (\Delta \mathbf{b}_{n-1} - \Delta \mathbf{b}_{n-2}) + \beta \Delta \mathbf{b}_{n-1}. \quad (5.10)$$

Če upoštevamo (5.9) (seveda z  $\alpha = 1$ ), in (5.10) vektorsko množimo z  $\Delta \mathbf{b}_{n-1}$ , dobimo

$$\frac{1}{\Delta_1^2} \Delta \mathbf{b}_{n+1} \times \Delta \mathbf{b}_{n-1} = \frac{1}{\Delta_0^2} \Delta \mathbf{b}_{n-1} \times \Delta \mathbf{b}_{n-2}. \quad (5.11)$$

Od tod sledi, da morata biti točki  $\mathbf{b}_{n-2}$  in  $\mathbf{b}_{n+2}$  na isti strani premice skozi točki  $\mathbf{b}_{n-1}$  in  $\mathbf{b}_{n+1}$ . Toda (5.11) implicira še en pogoj. Ker je absolutna vrednost vektorskega produkta ravno polovica ploščine trikotnika, ki ga vektorja razpenjata, morata biti ploščini trikotnikov nad vektorjema  $\Delta \mathbf{b}_{n+1}$  in  $\Delta \mathbf{b}_{n-1}$  ter  $\Delta \mathbf{b}_{n-1} \times$  in  $\Delta \mathbf{b}_{n-2}$  v razmerju  $\Delta_1^2 / \Delta_0^2$ . Iz tega dobimo še eno geometrijsko interpretacijo  $G^2$  zveznosti ravninskih Bézierovih krivulj: če se kontrolne točke  $\mathbf{b}_j$ ,  $j = n-2, n-1, n, n+1$ , ne spreminjajo, bo  $G^2$  zvezna krivulja  $\mathbf{s}_0$  ostala taka tudi tedaj, ko kontrolno točko  $\mathbf{b}_{n+2}$  premikamo vzdolž vzporednice skozi  $\mathbf{b}_{n-1}$  in  $\mathbf{b}_{n+1}$ .

**PRIMER 5.2.1** *Naj bosta segmenta enakomerno parametriziranega ravninskega Bézierovega kubičnega zlepka  $\mathbf{s}$  z delilnimi točkami  $u_j = j$ ,  $j = 0, 1, 2$ , podana takole*

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_0(t) &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} B_0^3(t) + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} B_1^3(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} B_2^3(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} B_3^3(t), \\ \mathbf{s}_0(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} B_0^3(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} B_1^3(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} B_2^3(t) + \mathbf{c} B_3^3(t). \end{aligned}$$

*Po prejšnjih ugotovitvah bi morala imeti krivulja  $\mathbf{s}$  zvezno ukrioljenost v delilni točki  $u_1 = 1$  za vsako kontrolno točko  $\mathbf{c} = (x, 1)^T$ . Preverimo, da je to res.*

## 5.3 $\nu$ -zlepki

Pri definiciji  $G^2$  zveznosti smo zahtevali, da je krivulja  $G^1$  zvezna. V posebnem primeru je to res, kadar je krivulja kar  $C^1$  zvezna. Seveda je to strožji pogoj, vendar vsaj v primeru kubičnih Bézierovih zelpkov vodi v konstrukcijo novega razreda geometrijsko zveznih zelpkov. To so t.i.  $\nu$ -zlepki. V tem razdelku si jih bomo podrobneje ogledali.

Izberimo ponovno  $N + 1$  interpolacijskih točk  $\mathbf{p}_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , in ustrezne delilne točke  $u_0 < u_1 < \dots < u_N$ . Iz razdelka 4.6 vemo, da za tako izbiro obstaja natanko en  $C^2$  zvezen kubični Bézierov zlepek, ki zadošča še dvema izbranim pogojevoma v robnih interpolacijskih točkah (denimo naravni zlepek). To pomeni, da razen pogojev na robu, nimamo dodatne svobode za konstrukcijo zlepka. Kljub temu pa je v praksi pogosto zaželeno imeti vpliv na obliko zlepka tudi s pogoji na notranje segmente (še posebej pri oblikovanju). Očitno moramo popustiti pri pogojih  $C^2$  zveznosti. Zahtevajmo torej, da je interpolacijski zlepek še vedno  $C^1$  zvezen, namesto  $C^2$  zveznosti pa zahtevajmo "samo"  $G^2$  zveznost. Naj bo torej  $\mathbf{s} : [u_0, u_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$   $C^1$  zvezen intrpolacijski zlepek, ki je v delilnih točkah  $u_j$  tudi  $G^2$  zvezen. Iz (5.6) in (5.7)

$$\mathbf{s}''(u_j + 0) - \mathbf{s}''(u_j - 0) = v_j \mathbf{s}'(u_j - 0), \quad j = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (5.12)$$

Vlogo parametra  $\beta$  na  $j$ -tem segmentu zlepka je tu prevzel parameter  $v_j$ , zaradi  $C^1$  zveznosti pa so na vseh segmentih parametri  $\alpha$  enaki 1. Zgornjo zvezo lahko še poenostavimo, če, podobno kot v razdelku 4.5, označimo z  $\mathbf{v}_j = \mathbf{s}'(u_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , (zaenkrat še neznane) tangentne vektorje v točkah  $\mathbf{p}_j$ . Zaradi  $C^1$  zveznosti je  $\mathbf{v}_j = \mathbf{s}'(u_j - 0) = \mathbf{s}'(u_j + 0)$  in (5.12) se prepíše v

$$\mathbf{s}''(u_j + 0) - \mathbf{s}''(u_j - 0) = v_j \mathbf{v}_j, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (5.13)$$

Naj bo spet  $t = (u - u_j)/\Delta_j$  lokalni parameter na  $j$ -tem segmentu. Po (4.19) je

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_j(t) &= \mathbf{p}_j B_0^3(t) + \left( \mathbf{p}_j + \frac{1}{3} \Delta_j \mathbf{v}_j \right) B_1^3(t) \\ &+ \left( \mathbf{p}_{j+1} - \frac{1}{3} \Delta_j \mathbf{v}_{j+1} \right) B_2^3(t) + \mathbf{p}_{j+1} B_3^3(t). \quad j = 0, 1, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Če to upoštevamo v (5.13), dobimo

$$\begin{aligned} &\frac{6}{\Delta_j^2} \left( \Delta \mathbf{p}_j - \frac{2}{3} \Delta_j \mathbf{v}_j - \frac{1}{3} \Delta_j \mathbf{v}_{j+1} \right) \\ &- \frac{6}{\Delta_{j-1}^2} \left( -\Delta \mathbf{p}_{j-1} + \frac{1}{3} \Delta_{j-1} \mathbf{v}_{j-1} + \frac{2}{3} \Delta_{j-1} \mathbf{v}_j \right) = v_j \mathbf{v}_j, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1, \end{aligned}$$

oziroma

$$\Delta_j \mathbf{v}_{j-1} + \left( 2 \Delta_{j-1} + \frac{1}{2} \Delta_{j-1} \Delta_j v_j + 2 \Delta_j \right) \mathbf{v}_j + \Delta_{j-1} \mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{b}_j, \quad (5.14)$$

kjer je

$$\mathbf{b}_j = 3 \left( \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j} \Delta \mathbf{p}_j + \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \Delta \mathbf{p}_{j-1} \right), \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Podobno kot pri konstrukciji  $C^1$  zlepkov lahko zgornji sistem zapišemo v matrični obliki  $GV = B$ , kjer je

$$G = \text{tridiag} \left( \Delta_j, 2\Delta_{j-1} + \frac{1}{2}\Delta_{j-1}\Delta_j v_j + 2\Delta_j, \Delta_{j-1} \right)_{j=1}^{N-1} \quad (5.15)$$

in

$$V = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{N-1}^T \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{N-1}^T \end{pmatrix}.$$

Matrika  $G$  je za nenegativne  $v_j$  diagonalno dominantna po vrsticah zato ima sistem (5.14) natanko eno rešitev, če seveda predpišemo še dva pogoja (denimo tangenta vektorja v  $\mathbf{p}_0$  in  $\mathbf{p}_N$ , ali pa kakšna pogoja, opisana pri konstrukciji  $C^1$  zlepkov). Rešitvi, ki jo implicira zgoraj opisani sistem, rečemo  $v$ -zlepke. Ker se je izkazalo, da so smiselni tudi negativni parametri  $v_j$  ([9]), se pri taki izbiri pojavi težava, saj  $G$  ni več nujno obrnljiva matrika. Parametri  $v_j$  so v stroki dobili ime *napetostni parametri*. Večje vrednosti parametrov  $v_j$  namreč implicirajo zlpke, ki se bolj "tesno" vpnejo v interpolacijske točke. Denimo namreč, da  $v_k \rightarrow \infty$ . Potem se  $k$ -ta enačba v sistemu (5.14) reducira v  $\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ . Če torej vse napetostne parametre močno povečamo, bo  $v$ -zlepke podoben odsekoma linearnemu interpolantu točk. Limitni zlepke seveda ne bo  $G^2$  zvezne, saj smo v definiciji izključili zlepke z ničelnimi tangnetnimi vektorji.

## 5.4 Kubični Hermiteovi $G^1$ zvezni zleпки

Geometrijsko zveznost bomo sedaj izkoristili za konstrukcijo  $G^1$  zveznih kubičnih *Hermiteovih zlepkov*. Iz definicije  $G^1$  zveznosti (5.6) sledi, da za konstrukcijo  $G^1$  zveznih zlepkov zadostuje predpisati enotski tangenti vektor v delilni točki. Opazimo tudi, da je parameter  $\alpha$  lahko poljubno pozitivno število, kar pomeni, da zlepke samo s smerjo tangenta vektorja ni enolično določen. Videli pa bomo, da je konstrukcija zlepkov neodvisna od parametrizacije. Oglejmo si sedaj konstrukcijo kubičnih Hermiteovih  $G^1$  zlepkov podrobneje.

Tokrat so poleg interpolacijskih točk  $\mathbf{p}_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , podane tudi (enotske) smeri tangent  $\mathbf{d}_j$  v teh točkah. Izberimo zaporednje delilnih točk  $u_0 < u_1 < \dots < u_N$ . Zahtevamo, da so za vsak  $j = 0, 1, \dots, N - 1$ , izpolnjeni pogoji

$$\begin{aligned}\mathbf{s}(u_j) &= \mathbf{p}_j, \\ \mathbf{s}(u_{j+1}) &= \mathbf{p}_{j+1}, \\ \frac{d}{du}\mathbf{s}(u_j) &= \alpha_{j,0}\mathbf{d}_j, \\ \frac{d}{du}\mathbf{s}(u_{j+1}) &= \alpha_{j,1}\mathbf{d}_{j+1}.\end{aligned}$$

V lokalnem parametru  $t = (u - u_j)/\Delta_j$  se zgornji pogoji prepišejo v pogoje za  $j$ -ti segment zleпка  $\mathbf{s}_j$ , zapisanega v lokalnem parametru  $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_j(0) &= \mathbf{p}_j, \\ \mathbf{s}_j(1) &= \mathbf{p}_{j+1}, \\ \frac{d}{dt}\mathbf{s}_j(0) &= \tilde{\alpha}_{j,0}\mathbf{d}_j, \\ \frac{d}{dt}\mathbf{s}_j(1) &= \tilde{\alpha}_{j,1}\mathbf{d}_{j+1},\end{aligned}$$

kjer je  $\tilde{\alpha}_{j,k} = 3/\Delta_j\alpha_{j,k}$ ,  $k = 0, 1$ . Zlepek je določen, ko izberemo  $\tilde{\alpha}_{j,k}$ . Torej je zlepek  $\mathbf{s}$  res neodvisen od parametrizacije, njegov  $j$ -ti segment pa se izraža kot

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_j(t) &= \mathbf{p}_0 B_0^3(t) + \left(\mathbf{p}_j + \tilde{\alpha}_{j,0}\mathbf{d}_j\right) B_1^3(t) \\ &+ \left(\mathbf{p}_{j+1} - \tilde{\alpha}_{j,1}\mathbf{d}_{j+1}\right) B_2^3(t) + \mathbf{p}_{j+1} B_3^3(t).\end{aligned}$$

Opazimo, da je konstrukcija popolnoma lokalna. Segment  $\mathbf{s}_j$  namreč lahko konstruiramo samo na podlagi podatkov na  $j$ -tem segmentu. Parametre  $\alpha_{j,k}$  smo izbrali vnaprej. Seveda njihova izbira vpliva na obliko  $G^1$  zveznega kubičnega zleпка. Zato je zanimiva ideja, da bi svobodo njihove izbire izkoristili za optimizacijo kakšne pomembne količine, povezane z zlepkom. V nadaljevanju si bomo ogledali enega od takih pristopov.

### 5.4.1 Minimizacija prožnostne energije

Videli smo, da je konstrukcija  $G^1$  zveznega kubičnega Bézierovega zleпка lokalna, zato lahko obravnavamo samo en segment zleпка. Omejimo se

na ravninske in prostorske krivulje. Iščemo torej krivuljo  $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^d$ ,  $d = 2, 3$ , dano z zahtevami

$$\mathbf{b}(j) = \mathbf{p}_j, \quad j = 0, 1, \quad (5.16)$$

$$\mathbf{b}'(j) = \alpha_j \mathbf{d}_j, \quad j = 0, 1. \quad (5.17)$$

Pri danih interpolacijskih točkah  $\mathbf{p}_j$  in smereh tangent  $\mathbf{d}_j$ , iščemo torej tak par pozitivnih parametrov  $\alpha_0$  in  $\alpha_1$ , ki minimizira izbrani funkcional, odvisen od krivulje  $\mathbf{b}$ . Znano je, da t.i. *prožnostna enegija*

$$\int_0^L \|\kappa(\eta)\|^2 d\eta, \quad (5.18)$$

kjer je  $\kappa(\eta)$  ukrivljenost krivulje  $\mathbf{b}$  v naravnem parametru in  $L$  ločna dolžina, igra pomembno vlogo pri obliki krivulje  $\mathbf{b}$ . Fizikalno predstavlja energijo elastične palice zaradi fleksijskega zvijanja. Če upoštevamo (5.3), se (5.18) v lokalnem parametru  $t \in [0, 1]$  izraža kot

$$\int_0^1 \|\kappa(t)\|^2 \|\mathbf{b}'(t)\| dt = \int_0^1 \frac{\|\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}''(t)\|^2}{\|\mathbf{b}'(t)\|^5} dt. \quad (5.19)$$

Pravkar zapisani izraz je seveda močno nelinearen v  $\alpha_0$  in  $\alpha_1$ , če kubično krivuljo  $\mathbf{b}$  dobimo iz (5.16) in (5.17). Torej je dokazovanje obstoja minimuma lahko zelo težak problema. Zato uporabimo naslednjo aproksimacijo. Če je lokalni parameter  $t$  blizu naravnemu (kar v splošnem seveda ni res), potem lahko (5.19) poenostavimo v

$$\psi(\alpha_0, \alpha_1) = \int_0^1 \|\mathbf{b}''(t)\|^2 dt, \quad (5.20)$$

saj je v naravnem parametru  $\|\mathbf{b}'(\eta)\| = 1$  in  $\mathbf{b}'(\eta)$  pravokoten na  $\mathbf{b}''(\eta)$ . Funkcional  $\psi(\mathbf{b})$  je kvadratičen v  $\alpha_0$  in  $\alpha_1$ , zato je iskanje njegovega minimuma lažja naloga.

Zastavimo si torej naslednjo nalogo: med vsemi kubičnimi krivuljami  $\mathbf{b}$ , ki zadoščajo (5.16) in (5.17) poiščimo tisto, za katero (5.20) minimalno. Natančneje, iščemo

$$\min_{\alpha_0, \alpha_1 > 0} \psi(\alpha_0, \alpha_1). \quad (5.21)$$

Problem je podrobneje obravnavan v [22], a se žal izkaže, da pri nekaterih smereh tangent  $\mathbf{d}_j$ , ni minimuma v ustreznem območju  $\mathcal{D} = \{(\alpha_0, \alpha_1) \mid \alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0\}$ . V tem primeru avtorja predlagata vstavljanje novih interpolacijskih točk in računanje dodatnih smeri tangent, ki zagotavljajo enolično

določeni minimum v  $\mathcal{D}$ . Druga pomanjkljivost te metode je, da predpostavlja poznavanje tangentnih vektorjev  $\mathbf{d}_j$ . To je vse prej kot realistična predpostavka.

Zato problem še nekoliko poenostavimo. Naraven način aproksimacije (5.20) je uporaba kakšnega kvadraturnega pravila. Uporabimo enega najpreprostejših, trapezno pravilo. Tako dobimo

$$\psi(\alpha_0, \alpha_1) = \int_0^1 \|\mathbf{b}''(t)\|^2 dt \approx \|\mathbf{b}''(0)\|^2 + \|\mathbf{b}''(1)\|^2. \quad (5.22)$$

Toda  $\|\mathbf{b}_i''(0)\|$  in  $\|\mathbf{b}_i''(1)\|$  sta odvisna od obeh smeri tangent  $\mathbf{d}_0$  in  $\mathbf{d}_1$ , zato lahko pričakujemo podobne težave in omejitve na dopustna območja kot v članku [22]. Temu se lahko izognemo z aproksimacijo izraza (5.22). Poiskali bomo najboljšo aproksimacijo za  $\mathbf{b}''(0)$  kot linearno kombinacijo  $\mathbf{b}(0)$ ,  $\mathbf{b}'(0)$ , in  $\mathbf{b}(1)$ , in podobno, najboljšo aproksimacijo za  $\mathbf{b}''(1)$  z  $\mathbf{b}(0)$ ,  $\mathbf{b}'(1)$  in  $\mathbf{b}(1)$ . Tu z najboljšo aproksimacijo mislimo na aproksimacijo, ki je točna za polinome stopnje  $\leq k$  za čimvečji  $k$ . Tako dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{b}''(0) &\approx 2(\mathbf{b}(1) - \mathbf{b}(0) - \mathbf{b}'(0)), \\ \mathbf{b}''(1) &\approx 2(\mathbf{b}'(1) - \mathbf{b}(1) + \mathbf{b}(0)), \end{aligned}$$

in po (5.16), (5.17) ter (5.22) lahko aproksimiramo  $\psi$  z

$$\psi(\alpha_0, \alpha_1) \approx \phi(\alpha_0, \alpha_1), \quad (5.23)$$

kjer je

$$\phi(\alpha_0, \alpha_1) := \|\Delta\mathbf{p}_0 - \alpha_0 \mathbf{d}_0\|^2 + \|\alpha_1 \mathbf{d}_1 - \Delta\mathbf{p}_0\|^2. \quad (5.24)$$

Tako pridemo do naslednjih rezultatov.

**IZREK 5.4.1** *Nelinearni funkcional  $\phi$  ima enoličen globalni minimum v notranjosti  $\mathcal{D}$  natanko takrat, ko velja*

$$\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_0^*, \alpha_1^*)^T := (\mathbf{d}_0 \cdot \Delta\mathbf{p}_0, \mathbf{d}_1 \cdot \Delta\mathbf{p}_0)^T > \mathbf{0}.$$

**DOKAZ.** Izrek dokažemo z neposrednim odvajanjem in analizo vrednosti na robu, zato ga bomo izpustili.  $\square$

Iz pravkar zapisanega izreka sledi konstrukcija krivulje  $\mathbf{b}$  na podlagi  $\alpha_0$  in  $\alpha_1$ , ki sta določeni z minimumom funkcionala. Postavi se vprašanje, ali je tako dobljena krivulja  $\mathbf{b}$  regularna. Ne samo to, zanima nas tudi, ali ima kakšne, predvsem za oblikovanje nesprejemljive lastnosti.

DEFINICIJA 5.4.1 Parametrična krivulja  $\mathbf{b}$  ima v točki  $\mathbf{p} = \mathbf{b}(t)$  ost, če je  $\mathbf{b}'(t) = \mathbf{0}$  in se smer tangente v tej točki obrne. V  $\mathbf{p}$  je samopresečišče, če obstaja parameter  $u \neq t$ , za katerega je  $\mathbf{b}(u) = \mathbf{p}$ . Zavihek pa je del krivulje, ki ga krivulja opiše več kot enkrat.

PRIMER 5.4.1 Bézierova krivulja, s kontrolnimi točkami

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} x \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ima denimo za  $x = -4$  samo presečišče, za  $x = 2$  pa ost. Primer krivulje, ki ima zavihek, pa je krivulja s kontrolnimi točkami

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z naslednjim izrekom potrdimo, da krivulja, konstruirana na podlagi parametrov iz izreka 5.4.1, nima neželenih lastnosti iz definicije 5.4.1.

IZREK 5.4.2 Naj bodo izpolnjene predpostavke izreka 5.4.1 in  $\mathbf{b}$  dobljeni geometrijski interpolant, definiran z (5.16) in (5.17). Potem je  $\mathbf{b}$  regularna in brez zank, osti in zavihkov.

DOKAZ. Zapišimo  $\mathbf{b}$  v Bézierovi obliki

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t) &= \mathbf{p}_0 B_0^3(t) + \left( \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3}(\mathbf{d}_0 \cdot \Delta \mathbf{p}_0) \mathbf{d}_0 \right) B_1^3(t) \\ &\quad + \left( \mathbf{p}_1 - \frac{1}{3}(\mathbf{d}_1 \cdot \Delta \mathbf{p}_0) \mathbf{d}_1 \right) B_2^3(t) + \mathbf{p}_1 B_3^3(t), \end{aligned}$$

Po ustrezni translaciji in rotaciji lahko predpostavimo, da je  $\mathbf{p}_0 = (0, 0)^T$  in  $\mathbf{p}_1 = (x_1, 0)^T$ ,  $x_1 > 0$ . Ker je po izreku 5.4.1  $\alpha > \mathbf{0}$ , je  $d_{k,1} > 0$ ,  $k = 0, 1$ , kjer je  $d_{k,1}$  prva komponenta  $\mathbf{d}_k$ . Z odvajanjem  $\mathbf{b}$  dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'(t) &= (\mathbf{d}_0 \cdot \Delta \mathbf{p}_0) \mathbf{d}_0 B_0^2(t) + (3 \Delta \mathbf{p}_0 - (\mathbf{d}_0 \cdot \Delta \mathbf{p}_0) \mathbf{d}_0 \\ &\quad - (\mathbf{d}_1 \cdot \Delta \mathbf{p}_0) \mathbf{d}_1) B_1^2(t) + (\mathbf{d}_1 \cdot \Delta \mathbf{p}_0) \mathbf{d}_1 B_2^2(t). \end{aligned}$$

Naj bo  $b'_1$  prva komponenta  $\mathbf{b}'$ . Za dokaz, da je  $\mathbf{b}$  regularna in brez zank, osti in zavihkov na  $[0, 1]$ , je dovolj videti  $b'_1(t) > 0$  za  $t \in [0, 1]$ . Očitno je

$$b'_1(t) = x_1 \left( d_{0,1}^2 B_0^2(t) + (3 - d_{0,1}^2 - d_{1,1}^2) B_1^2(t) + d_{1,1}^2 B_2^2(t) \right).$$

Ker sta tangenta vektorja  $\mathbf{d}_0$  in  $\mathbf{d}_1$  po privzetku normirana, in je  $d_{k,1} > 0$ , je  $0 < d_{k,1} < 1$ ,  $k = 0, 1$ . Obenem je tudi  $x_1 > 0$ , zato so vse kontrolne ordinate funkcije  $b'_1$  pozitivne. Iz lastnosti konveksne ovojnice za Bézierove krivulje torej sledi, da je  $b'_1$  pozitivna na  $[0, 1]$ , kar smo želeli dokazati.  $\square$



# Poglavje 6

## Geometrijska interpolacija

V prejšnjih poglavjih smo se večinoma ukvarjali z interpolacijo na tak način, da smo delilne točke (lahko jim rečemo tudi interpolacijski parametri) predpisali vnaprej. To je, kot smo videli, velikokrat omejujoče. V tem poglavju si bomo ogledali način interpolacije, kjer interpolacijskih parametrov ne predpišemo. Za tak način interpolacije se je uveljavil izraz *geometrijska interpolacija*.

### 6.1 Osnovni pojmi geometrijske interpolacije

Naj bo

$$\mathbf{T}_j \in \mathbb{E}^d, \quad j = 0, 1, \dots, k, \quad \mathbf{T}_j \neq \mathbf{T}_{j+1} \quad (6.1)$$

množica (ne nujno različnih) točk. Iščemo parametrično polinomsko krivuljo  $\mathbf{p}_n$  stopnje kvečjemu  $n$ , ki interpolira točke (6.1). V resnici iščemo tako urejeno zaporedje parametrov

$$t_0 < t_1 < \dots < t_k, \quad (6.2)$$

za katero bo

$$\mathbf{p}_n(t_j) = \mathbf{T}_j, \quad j = 0, 1, \dots, k. \quad (6.3)$$

Interpolaciji s parametričnimi polinomskimi krivuljami, pri kateri je zaporedje interpolacijskih parametrov (6.2) neznano, rečemo *parametrična* ali *geometrijska interpolacija*. Oba izraza sta na mestu, saj se prvi nanaša na tip objekta, s katerim interpoliramo, drugi pa na dejstvo, da nas zanima samo geometrijska lastnost podatkov, sama parametrizacija ni pomembna. To je pogosto dejstvo predvsem pri geometrijskem oblikovanju, kjer nas zanimajo objekti kot množice točk, manj pa njihova konkretna predstavitev v določeni parametrični obliki. Seveda obstajajo tudi področja, kjer je

parametrizacija bistvenega pomena, denimo sledenje objektom ali vodenje robotov, vendar se z njimi tukaj ne bomo ukvarjali.

Za funkcijski primer je seveda dobro znano, da lahko s polinomom stopnje  $n$  v splošnem interpoliramo kvečjemu  $n + 1$  točk. Naravno vprašanje, ki se tukaj pojavi je, koliko točk lahko interpoliramo s polinomske parametrično krivuljo stopnje  $n$  v pravkar opisanem geometrijskem smislu. Dejstvo namreč je, da parametri (6.2) predstavljajo dodatne prostostne stopnje, ki bi v splošnem lahko vplivale na povečanje števila interpolacijskih točk. Naivno lahko preprosto preštejemo število prostih parametrov ter ga primerjamo s številom enačb. Slednje so v primeru, ko je  $n \geq 2$ , zaradi (6.3) nelinearne. Kar posledično pomeni, da je smiselno obravnavati le primer, ko je število prostih parametrov enako številu enačb. Vsaj dva parametra lahko določimo vnaprej, saj linearna reparametrizacija krivulje  $\mathbf{p}_n$  ne spremeni njene stopnje. Torej si lahko poljubno izberemo  $t_0$  in  $t_k$  (ponavadi  $t_0 := 0$  in  $t_k := 1$ ). Ostane še  $k - 1$  neznanih interpolacijskih parametrov in  $d(n + 1)$  koeficientov polinomske krivulje (spomnimo se, da je krivulja v prostoru  $\mathbb{R}^d$ ). Enačb je očitno  $(k + 1)d$  in po izenačitvi dobimo

$$k = n + \frac{n - 1}{d - 1}. \quad (6.4)$$

Če upoštevamo, da mora biti  $k \in \mathbb{N}$ , pridemo do osnovne domneve o geometrijski interpolaciji s parametričnimi krivuljami, ki jo najdemo na primer že v [16].

**DOMNEVA 6.1.1** *Parametrična polinomska krivulja stopnje  $n$  v  $d$  dimenzionalnem prostoru lahko interpolira*

$$n + 1 + \left\lfloor \frac{n - 1}{d - 1} \right\rfloor \quad (6.5)$$

točk.

Zadnji sumand v (6.5) predstavlja razkorak med funkcijskim in parametričnim primerom. Pri izbrani stopnji polinoma  $n$  je očitno največji, ko je  $d = 2$ , torej v ravnini. Tam naj bi bilo mogoče s parametričnim polinomom stopnje  $n$  interpolirati kar  $2n$  točk.

Problem geometrijske interpolacije točk (včasih ji rečemo tudi interpolacija v Lagrangeovem smislu) lahko posplošimo na Hermiteovo interpolacijo, kjer poleg točk interpoliramo tudi smeri tangent, drugih odvodov, ... Natančneje, dano je zaporedje interpolacijskih točk

$$\mathbf{T}_j \in \mathbb{E}^d, \quad j = 0, 1, \dots, \ell, \quad \mathbf{T}_j \neq \mathbf{T}_{j+1}, \quad (6.6)$$

skupaj s pripadajočimi (ponavadi enotskimi vektorji)

$$\mathbf{d}_{j,r} \in \mathbb{R}^d, \quad j = 0, 1, \dots, \ell, \quad r = 1, \dots, \mu_j. \quad (6.7)$$

Pri tem naj velja zveza  $\sum_{j=0}^{\ell} (\mu_j + 1) = k + 1$ . Ponovno se lahko vprašamo o obstoju parametrične krivulje  $\mathbf{p}_n$ , ki interpolira točke (6.6) in vektorje (6.7) v geometrijskem smislu. Torej zahtevamo, da je v točkah  $\mathbf{T}_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, \ell$ , krivulja  $G^{\mu_j}$  zvezna. Zgoraj omenjena domneva je smiselna tudi za tako obliko interpolacije.

V nadeljevanju si bomo ogledali nekaj primerov geometrijske interpolacije s krivuljami nizke stopnje. Iz njih bo razvidno, da težavnost naloge dristično narašča s stopnjo interpolacijske krivulje. Zato bo za obravnavo splošnega problema potrebno uporabiti močna matematična orodja, na primer rezultante, homotopijo, asimptotično analizo ...

## 6.2 Geometrijska interpolacija s parabolami

### 6.2.1 Hermiteov primer

Oglejmo si enega najpreprostejših primerov geometrijske interpolacije, Hermiteovo interpolacijo z ravninskimi parabolimi krivuljami. Iz domneve sledi ( $d = 2$ ,  $n = 2$ ), da bo morda mogoče interpolirati 4 točke, ali, v posplošenem Hermiteovem smislu denimo dve točki in dve smeri tangent v teh točkah. V funkcijskem primeru bi to pomenil, da s parabomo interpoliramo dve vrednosti in dva odvoda, kar v splošnem ni nikoli mogoče, saj dobimo večinoma nerešljiv predoločen sistem enačb. Toda pri geometrijski interpolaciji je drugače. Naj bosta torej dani točki  $\mathbf{T}_j \in \mathbb{E}^2$  in pripadajoči smeri tangent  $\mathbf{d}_j := \mathbf{d}_{j,1}$ ,  $j = 0, 1$ . Iščemo parametrično parabolo  $\mathbf{p} := \mathbf{p}_2$ , ki interpolira točki in tangenti v  $G^1$  smislu, torej

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{T}_0, \quad \mathbf{p}'(0) = \alpha_0 \mathbf{d}_0, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{T}_1, \quad \mathbf{p}'(1) = \alpha_1 \mathbf{d}_1. \quad (6.9)$$

Iz prejšnjega razdelka vemo, da za izbrani vrednosti  $\alpha_0$  in  $\alpha_1$  obstaja natančno ena kubična parametrična krivulja  $\mathbf{q}$ , ki zadošča interpolacijskim pogojem (6.8) in (6.9). Poskusimo torej izbrati  $\alpha_0$  in  $\alpha_1$  tako, da se bo  $\mathbf{q}$  reducirala v parabolo  $\mathbf{p}$ . Če  $\mathbf{q}$ , ki zadošča pogojem (6.8) in (6.9) zapišemo v Bézierovi obliki in zahtevamo, da se reducira v parabolo (torej je njen tretji odvod identično nič), dobimo naslednji pogoj

$$2 \Delta \mathbf{T}_0 - \alpha_0 \mathbf{d}_0 - \alpha_1 \mathbf{d}_1 = \mathbf{0}. \quad (6.10)$$

Ne spregljemo, da sta v tej zvezi skriti dve skalarni enačbi. Če (6.10) zaporedoma planarno vektorsko množimo z  $\mathbf{d}_1$  in  $\mathbf{d}_0$  dobimo rešitev

$$\alpha_0 = \frac{2 (\Delta \mathbf{T}_0 \times \mathbf{d}_1)}{\mathbf{d}_0 \times \mathbf{d}_1}, \quad \alpha_1 = \frac{2 (\mathbf{d}_0 \times \Delta \mathbf{T}_0)}{\mathbf{d}_0 \times \mathbf{d}_1}. \quad (6.11)$$

Seveda samo v primeru, ko vektorji  $\mathbf{d}_0$ ,  $\mathbf{d}_1$  in  $\Delta \mathbf{T}_0$  niso paroma kolinearni. Toda zagotoviti moramo še pozitivnost parametrov  $\alpha_0$  in  $\alpha_1$ . Kdaj natančno rešitev zares obstaja, je razvidno iz naslednjega izreka.

**IZREK 6.2.1** *Regularna parabolčna krivulja  $\mathbf{p}$ , ki zadosti Hermiteovim interpolacijskim pogojem (6.8) in (6.9) obstaja natanko tedaj, ko je izpolnjen eden od naslednjih pogojev*

- Vektorji  $\mathbf{d}_0$ ,  $\mathbf{d}_1$  in  $\Delta \mathbf{T}_0$  so paroma nekolinearni. Planarna vektorska produkta  $\mathbf{d}_0 \times \Delta \mathbf{T}_0$  in  $\mathbf{d}_0 \times \mathbf{d}_1$  sta različnih predznakov, planarni vektorski produkt  $\mathbf{d}_0 \times \mathbf{d}_1$  pa istega predznaka kot  $\mathbf{d}_0 \times \Delta \mathbf{T}_0$ .
- Vektorji  $\mathbf{d}_0$ ,  $\mathbf{d}_1$  in  $\Delta \mathbf{T}_0$  so kolinearni in imajo isto smer kot vektor  $\Delta \mathbf{T}_0$  (parabola se v tem primeru izrodi v premico natanko tedaj, ko je  $\alpha_0 = \alpha_1 = \|\Delta \mathbf{T}_0\|$ ).

**DOKAZ.** Privzemimo najprej primer iz točke a). Ker so vektorji paroma nekolinearni, so vsi planarni vektorski produkti v (6.11) neničelni. Ker morata biti  $\alpha_0$  in  $\alpha_1$  pozitivna, je to mogoče le, če sta predznaka  $\mathbf{d}_0 \times \Delta \mathbf{T}_0$  in  $\mathbf{d}_0 \times \mathbf{d}_1$  enaka, predznaka  $\mathbf{d}_1 \times \Delta \mathbf{T}_0$  in  $\mathbf{d}_0 \times \mathbf{d}_1$  pa različna, kar je v skladu s predpostavkami.

Naj bodo sedaj izpolnjene predpostavke iz točke b). Do rešitev (6.11) sedaj ne moremo priti na zgoraj opisani način, saj so vsi planarni vektorski produkti enaki 0. Najprej ugotovimo, da rešitev obstaja v primeru, če vsi vektorji kažejo v isto smer. Iz (6.10) dobimo, da je interpolacijska krivulja parabola natanko tedaj, ko je

$$\alpha_0 + \alpha_1 = 2 \|\Delta \mathbf{T}_0\|.$$

Vsaka izbira para pozitivnih števil  $\alpha_0$  in  $\alpha_1$ , ki zadošča zgornji zvezi, da eno od rešitev. Parabola se reducira v premico, ko je še drugi odvod identično nič. Iz Bézierove reprezentacije tako dobimo še pogoj

$$\left( \Delta \mathbf{T}_0 - \frac{2}{3} \alpha_0 \mathbf{d}_0 - \frac{1}{3} \alpha_1 \mathbf{d}_1 \right) B_0^1(t) + \left( \frac{1}{3} \alpha_0 \mathbf{d}_0 - \frac{2}{3} \alpha_1 \mathbf{d}_1 - \Delta \mathbf{T}_0 \right) B_1^1(t) = \mathbf{0}. \quad (6.12)$$

Če upoštevamo (6.10), dobimo  $\alpha_0 = \alpha_1 = \|\Delta \mathbf{T}_0\|$ .

Prepričajmo se, da rešitve ni, če vektorji  $\mathbf{d}_0$ ,  $\mathbf{d}_1$  in  $\Delta \mathbf{T}_0$  ne kažejo v isto

smer. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da vektorja  $\mathbf{d}_0$  in  $\Delta\mathbf{T}_0$  kažeta v isto smer, vektor  $\mathbf{d}_1$  pa v nasprotno. Koordinatni sistem izberimo tako, da je  $\mathbf{d}_0 = (1, 0)^T$ ,  $\mathbf{d}_1 = -\mathbf{d}_0$  in  $\Delta\mathbf{T}_0 = (\|\Delta\mathbf{T}_0\|, 0)^T$ . V primeru, da bi interpolacijska parabola obstajala, bi bila določena s tremi kontrolnimi točkami

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} \|\Delta\mathbf{T}_0\| \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Veljati bi moralo  $\alpha_0 = 3x$  in  $\alpha_1 = -3(\|\Delta\mathbf{T}_0\| - x)$ . To pa vodi v protislovje s pogojem (6.10).

V vseh ostalih primerih rešitve ni. Ker je njihova obravnava zelo podobna, si oglejmo le primer, ko sta vektorja  $\mathbf{d}_0$  in  $\Delta\mathbf{T}_0$  kolinearna, vektorja  $\mathbf{d}_0$  in  $\mathbf{d}_1$  pa ne. Če bi obstajala parabola, ki zadosti (6.8) in (6.9), bi njena druga kontrolna točka ležala na premici, ki gre skozi  $\mathbf{T}_0$  v smeri vektorja  $\mathbf{d}_0$  to pa pomeni, da tudi odvod v točki  $\mathbf{T}_1$  kaže v smer  $\mathbf{d}_0$ , kar smo izključili.  $\square$

### 6.2.2 Lagrangeov primer

Oglejmo si še (videli bomo, da precej bolj zapleten) primer Lagrangeove interpolacije. Iz domneve 6.1.1 razberemo, da bo s parametrično ravninsko parabolo morda mogoče interpolirati 4 ravninske točke. Problem torej lahko zastavimo takole: ali obstajata parametra  $t_1$  in  $t_2$ ,  $t_0 := 0 < t_1 < t_2 < t_3 := 1$  in parabola  $\mathbf{p} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , za katero je  $\mathbf{p}(t_j) = \mathbf{T}_j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ . Že nekaj preprostih opazk izloči nekatere konfiguracije interpolacijskih točk  $\mathbf{T}_j$ . Če denimo interpolacijske točke določajo poligon, ki ga neka premica  $ax + by + c = 0$  seka v treh točkah, interpolacijska parabola ne obstaja. V primeru, da bi obstajala, torej  $\mathbf{p} = (x_2(t), y_2(t))^5$ , kjer sta  $x_2$  in  $y_2$  polinoma stopnje 2, bi imela kvadratna enačba  $ax_2(t)^2 + by_2(t)^2 + c = 0$  tri rešitve, kar ni mogoče.

**IZREK 6.2.2** *Regularna parabola interpolira 4 nekolinearne točke  $\mathbf{T}_j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , pri naraščajoče urejenih parametrih  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 = 1$  natanko tedaj, ko imajo planarni vektorski produkti  $\Delta\mathbf{T}_0 \times \Delta\mathbf{T}_1$ ,  $\Delta\mathbf{T}_1 \times \Delta\mathbf{T}_2$  in  $\Delta\mathbf{T}_0 \times \Delta\mathbf{T}_2$  vsi isti predznak.*

**DOKAZ.** Denimo, da interpolacijska parabola  $\mathbf{p}$  obstaja. Iz formule za (fleksijsko) ukrivljenost regularne ravninske krivulje (2.1.4) hitro izpeljemo, da je le ta povsod istega predznaka. To med drugim pomeni, da se tangentni vektor na krivulji vseskozi vrta v isto smer. Obenem opazimo, da je za dva poljubna parametra  $0 \leq u_1 < u_2 \leq 1$  predznak planarnega vektorskega produkta  $\mathbf{p}'(u_1) \times \mathbf{p}'(u_2)$  konstanten. Torej tangenta na paraboli za

vrednosti parametrov na  $[0, 1]$  glede na izbarno smer  $\mathbf{p}'(0)$  ne more opisati kota večjega od  $\pi$ . Od tod sledijo zaključki izreka.

Dokaz v drugo smer je precej bolj zapleten. Privzemimo sedaj, da so dane 4 nekolinearne točke  $\mathbf{T}_j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , ki zadoščajo pogojem za predznake planarnih vektorskih produktov v izreku. Najprej izpeljimo pogoje za interpolacijska parametra  $0 < t_1 < t_2 < 1$ , ki zagotavljajo, da je interpolacijska krivulja parabola. Vemo, da za vsak nabor naraščajoče urejenih parametrov  $t_j$  obstaja enolična kubična parametrična krivulja, ki interpolira podane točke. Tokrat krivuljo zapišimo s pomočjo deljenih diferenc v Newtonovi obliki, torej

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) = & \mathbf{T}_0 + (t - t_0)[t_0, t_1] \mathbf{p} + (t - t_0)(t - t_1)[t_0, t_1, t_2] \mathbf{p} \\ & + (t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)[t_0, t_1, t_2, t_3] \mathbf{p}, \end{aligned}$$

kjer je

$$\begin{aligned} [x_i]f &= f(x_i) \\ [x_i, x_{i+1}, \dots, x_j]f &= \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_j]f - [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}]f}{x_j - x_i}, \quad x_i \neq x_j. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Očitno bo  $\mathbf{p}$  parabola natanko tedaj, ko je

$$[t_0, t_1, t_2, t_3] \mathbf{p} = \mathbf{0}.$$

Upoštevajmo  $t_0 = 0$  in  $t_3 = 1$  ter (6.13), pa dobimo pogoj

$$\begin{aligned} t_1 t_2 (t_2 - t_1) \Delta \mathbf{T}_2 - t_1 t_2 (1 - t_2) \Delta \mathbf{T}_1 - t_1 (1 - t_1) (1 - t_2) \Delta \mathbf{T}_1 \\ + (1 - t_1) (t_2 - t_1) (1 - t_2) \Delta \mathbf{T}_0 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Zgornja enakost predstavlja dve skalarni enačbi za spremenljivki  $t_1$  in  $t_2$ . Ekvivalentni enačbi dobimo, če jo planarno vektorsko množimo z  $\Delta \mathbf{T}_0$  in  $\Delta \mathbf{T}_1$  z leve. Pišimo  $d_{ij} = \Delta \mathbf{T}_i \times \Delta \mathbf{T}_j$  in dobimo

$$\begin{aligned} t_1 t_2 (t_2 - t_1) d_{02} - (t_1 t_2 (1 - t_2) + t_1 (1 - t_1) (1 - t_2)) d_{01} &= 0 \\ t_1 t_2 d_{12} - (1 - t_1) (1 - t_2) d_{01} &= 0. \end{aligned}$$

S pomočjo kakšnega od paketov za simbolno računanje ugotovimo, da ima zgornji sistem 4 realne rešitve. Dve od njih sta  $t_1 = 0$  in  $t_2 = 1$  ter  $t_1 = 1$  in  $t_2 = 0$ , ki očitno nista ustrezni. Druga dva para pa sta

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{d_{01} (d_{02} + d_{12}) + \sqrt{d_{01} d_{12} (d_{01} + d_{02}) (d_{02} + d_{12})}}{(d_{01} - d_{12}) (d_{02} + d_{12})}, \\ t_2 &= \frac{d_{01} (d_{01} + d_{02}) + \sqrt{d_{01} d_{12} (d_{01} + d_{02}) (d_{02} + d_{12})}}{(d_{01} - d_{12}) (d_{01} + d_{02})} \end{aligned}$$

ter

$$t_1 = \frac{d_{01} d_{02}}{d_{01} (d_{02} + d_{12}) + \sqrt{d_{01} d_{12} (d_{01} + d_{02}) (d_{02} + d_{12})}},$$

$$t_2 = \frac{d_{01} (d_{01} + d_{12} + d_{02})}{d_{01} (d_{01} + d_{02}) + \sqrt{d_{01} d_{12} (d_{01} + d_{02}) (d_{02} + d_{12})}}.$$

Po predpostavki so vsi  $d_{ij}$ ,  $i < j$ , istega predznaka. Iz zgornjih formul je razvidno, da lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da so pozitivni. Tedaj pa z nekaj računanja in ocenjevanja dobimo, da je prvi par rešitev vedno negativen ali večji od 1, drugi pa ustrezen, torej  $0 < t_1 < t_2 < 1$ . S tem je izrek dokazan.  $\square$

### 6.3 Kubična geometrijska interpolacija v $\mathbb{E}^3$

Naslednji zanimiv primer geometrijske Lagrangeove interpolacije je interpolacija v prostoru  $\mathbb{E}^3$ . Iz Höllig-Kochove domneve za  $d = 3$  dobimo, da je mogoče s polinomom stopnje  $n$  interpolirati

$$n + 1 + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Če se omejimo na kubični primer torej domnevamo, da bomo lahko interpolirali 5 točk. Že iz paraboličnega primera je razvidno, da rešitev najbrž ne bo obstajala za splošno konfiguracijo prostorskih točk. Naš cilj je, da poiščemo pogoje, ki zagotavljajo rešljivost problema.

Nalogo formalno zastavimo takole. Denimo, da je danih 5 točk  $\mathbf{T}_j \in \mathbb{E}^3$ ,  $j = 0, 1, 2, 3, 4$ . Ponovno predpostavimo, da dve zaporedni nista enaki, torej  $\mathbf{T}_j \neq \mathbf{T}_{j+1}$ . Sprašujemo se, ali obstaja enolični regularni kubični interpolant  $\mathbf{p}$ , ki zadosti pogojem

$$\mathbf{p}(t_j) = \mathbf{T}_j, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (6.14)$$

kjer so  $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$  neznanne vrednosti interpolacijskih pogojev? Seveda lahko predpostavimo, da je  $t_0 := 0$  in  $t_4 := 1$ , saj sicer uporabimo afino reparametrizacijo. Tako kot neznanke ostanejo le še parametri  $t_1, t_2$  in  $t_3$ , ki morajo ležati v območju

$$\mathcal{D} := \{\mathbf{t} := (t_1, t_2, t_3); 0 =: t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 := 1\}. \quad (6.15)$$

Spomnimo se, da so tudi tukaj (tako kot v paraboličnem primeru) neznanke tudi koeficienti polinoma  $\mathbf{p}$ . Toda, ko določimo vrednosti neznank

$t_j, j = 1, 2, 3$ , lahko uporabimo katerokoli klasično interpolacijsko shemo na poljubnih štirih interpolacijskih točkah in od tod dobimo koeficiente. Glavni problem je torej iskanje vrednosti parametrov  $t_j, j = 1, 2, 3$ .

Polinomska krivulja  $\mathbf{p}$ , ki zadošča pogojem (6.14) je kubična, zato je v jedru vsake deljene diference na petih točkah, torej

$$[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4]\mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (6.16)$$

Ker so točke  $t_j$  različne, lahko zgornji pogoj zapišemo kot

$$\sum_{j=0}^4 \frac{1}{\dot{\omega}(t_j)} \mathbf{B}(t_j) = \mathbf{0}, \quad (6.17)$$

kjer je

$$\omega(t) := \prod_{j=0}^4 (t - t_j), \quad \dot{\omega} := \frac{d\omega}{dt}.$$

Po (6.14) se (6.17) prepíše v

$$\sum_{j=0}^4 \frac{1}{\dot{\omega}(t_j)} \mathbf{T}_j = \mathbf{0}, \quad (6.18)$$

torej v sistem treh nelinearnih enačb za neznanke  $t_1, t_2$  in  $t_3$ . Ker je

$$[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4]\mathbf{T}_k = \sum_{j=0}^4 \frac{1}{\dot{\omega}(t_j)} \mathbf{T}_k = \mathbf{0}, \quad (6.19)$$

lahko enega od sumandov v (6.18) vedno izločimo. Če na primer uporabimo (6.19) za  $k = 4$ , dobimo

$$\sum_{j=0}^3 \frac{1}{\dot{\omega}(t_j)} (\mathbf{T}_j - \mathbf{T}_4) = \mathbf{0} \quad (6.20)$$

Vektorsko množenje (v  $\mathbb{R}^3$ ) enakosti (6.20) z  $(\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_4)$  in nato skalarno množenje z  $(\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_4)$  vodi do

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\dot{\omega}(t_0)} ((\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_4) \times (\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_4)) \cdot (\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_4) \\ & + \frac{1}{\dot{\omega}(t_1)} ((\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_4) \times (\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_4)) \cdot (\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_4) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (6.21)$$



Toda  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ , in preproste lastnosti determinant poenostavimo (6.21) v

$$\frac{\dot{\omega}(t_0)}{\dot{\omega}(t_1)} + 1 + \frac{\det(\Delta \mathbf{T}_0, \Delta \mathbf{T}_2, \Delta \mathbf{T}_3)}{\det(\Delta \mathbf{T}_1, \Delta \mathbf{T}_2, \Delta \mathbf{T}_3)} = \mathbf{0},$$

kjer je  $\Delta \mathbf{T}_j := \mathbf{T}_{j+1} - \mathbf{T}_j$ . Na podoben način dobimo še dve skalarni enačbi in tako končno sistem enačb

$$\begin{aligned} f_1(t_1, t_2, t_3; \alpha_1) &:= \frac{\dot{\omega}(t_0)}{\dot{\omega}(t_1)} + 1 + \alpha_1 = 0, \\ f_2(t_1, t_2, t_3; \alpha_2) &:= -\frac{\dot{\omega}(t_4)}{\dot{\omega}(t_0)} + \alpha_2 = 0, \\ f_3(t_1, t_2, t_3; \alpha_3) &:= \frac{\dot{\omega}(t_4)}{\dot{\omega}(t_3)} + 1 + \alpha_3 = 0, \end{aligned} \quad (6.22)$$

kjer je

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \frac{\det(\Delta \mathbf{T}_0, \Delta \mathbf{T}_2, \Delta \mathbf{T}_3)}{\det(\Delta \mathbf{T}_1, \Delta \mathbf{T}_2, \Delta \mathbf{T}_3)}, \\ \alpha_2 &= \frac{\det(\Delta \mathbf{T}_1, \Delta \mathbf{T}_2, \Delta \mathbf{T}_3)}{\det(\Delta \mathbf{T}_0, \Delta \mathbf{T}_1, \Delta \mathbf{T}_2)}, \\ \alpha_3 &= \frac{\det(\Delta \mathbf{T}_0, \Delta \mathbf{T}_1, \Delta \mathbf{T}_3)}{\det(\Delta \mathbf{T}_0, \Delta \mathbf{T}_1, \Delta \mathbf{T}_2)}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Sistem (6.22) lahko na kratko zapišemo kot

$$\mathbf{F}(\mathbf{t}; \boldsymbol{\alpha}) := [f_1(t_1, t_2, t_3; \alpha_1), f_2(t_1, t_2, t_3; \alpha_2), f_3(t_1, t_2, t_3; \alpha_3)]^T = \mathbf{0},$$

kjer je  $\boldsymbol{\alpha} := [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T$ . Sedaj lahko zapišemo naslednji pomembni rezultat.

**IZREK 6.3.1** *Prostorska kubična parametrična krivulja skozi pet točk  $\mathbf{T}_j \in \mathbb{E}^3$ ,  $j = 0, 1, \dots, 4$ , je enolično določena natanko tedaj, ko so komponente vektorja  $\boldsymbol{\alpha}$ , definirane z (6.23), pozitivne.*

**DOKAZ.** Dokaj preprosto je videti, da je pozitivnost komponent vektorja  $\boldsymbol{\alpha}$  potreben pogoj za obstoj rešitve. Privzemimo, da ima sistem (6.22) enolično rešitev. Torej obstaja trojica realnih števil  $t_1 < t_2 < t_3$ , ki je v odmočju  $\mathcal{D}$ , definiranim z (6.15). Z neposrednim računom preverimo, da je

$$\frac{\dot{\omega}(t_0)}{\dot{\omega}(t_1)} < -1, \quad \frac{\dot{\omega}(t_4)}{\dot{\omega}(t_0)} > 0, \quad \text{in} \quad \frac{\dot{\omega}(t_4)}{\dot{\omega}(t_3)} < -1.$$

Od tod sledi, da so  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , pozitivna števila.

Dokaz v obratno smer je bistveno bolj zapleten. Razdelili ga bomo v dva dela:

- a) Dokazali bomo obstoj enolične rešitve sistema za poseben vektor  $\mathbf{\alpha}^*$ .
- b) S pomočjo homotopije bomo dokazali, da enolična rešitev obstaja tudi za vsak drug vektor  $\mathbf{\alpha}$ .

Posvetimo se najprej točki a). Izberimo vektor  $\mathbf{\alpha}^* := [3, 1, 3]^T$  in si oglejmo sistem

$$\mathbf{F}(\mathbf{t}; \mathbf{\alpha}^*) = \mathbf{0}, \quad (6.24)$$

Lahko ga prepisemo v polinomsko obliko na  $\mathcal{D}$

$$\begin{aligned} q_1(t_1, t_2, t_3) &:= f_1(t_1, t_2, t_3; 3) \dot{\omega}(t_1) = 0, \\ q_2(t_1, t_2, t_3) &:= f_2(t_1, t_2, t_3; 1) \dot{\omega}(t_0) = 0, \\ q_3(t_1, t_2, t_3) &:= f_3(t_1, t_2, t_3; 3) \dot{\omega}(t_3) = 0. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Za reševanja pravkar zapisanega algebraičnega sistema lahko, podobno kot v paraboličnem ravninskem primeru, uporabimo rezultante.

$$\text{Res}(\text{Res}(q_1, q_2, t_2), \text{Res}(q_2, q_3, t_2), t_3) = 16 t_1^{10} (1 - t_1)^{10} q(t_1),$$

kjer je

$$q(t_1) := 1024 t_1^6 - 3072 t_1^5 + 5952 t_1^4 - 6784 t_1^3 + 4392 t_1^2 - 1512 t_1 + 189.$$

Ker je  $t_1 \neq 0, 1$ , je edinih šest kandidatov za prvo komponento rešitve vseh šest ničel polinoma  $q$ , torej

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2 \pm i \sqrt{17 \pm 3 \sqrt{21}}}{4}.$$

Če si ogledamo drugo komponento sistema (6.25), izločimo vse ničle razen  $t_1 = 1/4$ . Končno se prepričamo, da ta rešitev vodi do edine rešitve sistema, namreč

$$\mathbf{t} = (1/4, 2/4, 3/4)^T. \quad (6.26)$$

Malo več dela bo s točko b). Izberimo linearno homotopijo

$$\mathbf{H}(\mathbf{t}, \mathbf{\alpha}; \lambda) := (1 - \lambda) \mathbf{F}(\mathbf{t}; \mathbf{\alpha}^*) + \lambda \mathbf{F}(\mathbf{t}; \mathbf{\alpha}) \quad (6.27)$$

Spomnimo se topološkega pojma Brouwerjeve stopnje diferenciable pre-slikave  $\mathbf{G}$ . Definirana je kot

$$\text{degree}(\mathbf{G}, \mathcal{D}) = \sum_{\mathbf{t} \in \mathcal{D}, \mathbf{G}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}} \text{sign}(\det(J(\mathbf{G})(\mathbf{t}))), \quad (6.28)$$

kjer je  $J$  Jacobijeva matrika preslikave  $G$  glede na  $\mathbf{t}$ . Brouwerjeva stopnja nam lahko da informacijo o številu ničel preslikave v območju  $\mathcal{D}$ . V posebnem primeru, ko je

$$\text{degree}(\mathbf{G}, \mathcal{D}) = \pm 1,$$

ima  $\mathbf{G}$  vsaj eno ničlo v  $\mathcal{D}$ . Še več ([4, p. 52]), če (6.28) uporabimo na  $\mathbf{H}$ , je Brouwerjeva stopnja invariantna za vse  $\lambda \in [0, 1]$ , če je le

$$\mathbf{H}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\alpha}; \lambda) \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{t} \in \partial \mathcal{D}, \lambda \in [0, 1]. \quad (6.29)$$

Naj opozorimo, da v primeru, ko je  $J(\mathbf{G})$  v (6.28) globalno neizrojena, absolutna vrednost Brouwerjeve stopnje poda natančno število ničel  $\mathbf{G}$  na  $\mathcal{D}$ . V našem primeru se izkaže, da je Jacobijeva matrika

$$J(\mathbf{H})(\mathbf{t}) := \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{t}}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\alpha}; \lambda) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{t}}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\alpha}^*)$$

res globalno neizrojena, saj je njena determinanta enaka

$$\frac{6(t_0 - t_4)^3 (t_4 - t_1) (t_4 - t_2) (t_4 - t_3)}{(t_1 - t_0) (t_2 - t_0) (t_3 - t_0) (t_2 - t_1)^2 (t_3 - t_1)^2 (t_3 - t_2)^2} < 0.$$

Ker za  $\lambda = 0$  homotopija (6.27) postane naš posebni sistem (6.24), za katerega smo dokazali enolično rešitev, in je

$$\text{degree}(\mathbf{H}(\bullet, \boldsymbol{\alpha}^*; \bullet), \mathcal{D}) = -1,$$

bo Brouwerjeva stopnja  $\mathbf{H}$  enaka  $-1$  za vse  $\lambda \in [0, 1]$ , če bo le izpolnjen pogoj (6.29).

Toda na žalost  $\mathbf{H}$  ni diferenciable na  $\partial \mathcal{D}$ . Še več, je celo nezvezna in neomejena v posameznih točkah robu. Zato potrebujemo naslednjo lemo.

**LEMA 6.3.1** *Obstaja kompaktna množica  $\tilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}$ , ki vsebuje posebno rešitev (6.26) in je  $\mathbf{H}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\alpha}; \lambda) \neq \mathbf{0}$  za  $\mathbf{t} \in \partial \tilde{\mathcal{D}}$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  ter za  $\boldsymbol{\alpha}$  s pozitivnimi komponentami.*

Dokaz leme je tehničen in ga bomo izpustili. Bralci si ga lahko ogledajo v [17]. Dokaz zadnje leme pa zaključi tudi dokaz izreka 6.3.1.  $\square$

## 6.4 Asimptotična analiza

V prejšnjem poglavju smo videli, da je v splošnem težko študirati rešljivost Höllig-Kochove domneve. Poglavitna težava je v tem, da geometrija interpolacijskih točk močno vpliva na obravnavo sistema nelinearnih enačb. Temu se morda vsaj deloma izognemo, če predpostavimo, da interpolacijske točke ležijo na kakem majhnem loku gladke regularne parametrične krivulje. Obravnava take vrste problemov rečemo *asimptotična analiza*. Pomembna je predvsem zato, ker implicira obstoj geometrijskega interpolanta, ki ima visok *asimptotični red aproksimacije*. Zato si najprej podrobneje oglejmo slednji pojem.

### 6.4.1 Asimptotični red aproksimacije

Preden začnemo obravnavati red aproksimacije, se moramo odločiti kako bomo normirali razred gladih parametričnih krivulj. Naj bo  $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{E}^d$  gladka parametrična krivulja, kjer je  $I \subset \mathbb{R}$  zaprt interval. Potem definiramo normo krivulje  $\mathbf{f}$  takole:

$$\|\mathbf{f}\| = \max_{1 \leq i \leq d} \|f_i\|_\infty.$$

Pri tem bomo privzeli, da je norma  $\|\cdot\|_\infty$  definirana na ustreznem intervalu. Kjerkoli bo mogoče, bomo za  $I$  vzeli kar interval  $[0, h]$ ,  $h > 0$ , saj vemo, da lahko z afino transformacijo vsak zaprti interval preslikamo na konkretno izbranega.

Najprej dokažimo naslednjo lemo, ki se v veliki meri naslanja na klasični rezultat o napaki interpolacije v funkcijskem primeru.

**LEMA 6.4.1** *Naj bosta  $\mathbf{f} : [0, h] \rightarrow \mathbb{E}^d$  in  $\mathbf{g} : [0, h] \rightarrow \mathbb{E}^d$  vsaj  $r + 1$ -krat zvezno odvedljivi krivulji (po komponentah) z odvodi omejenimi neodvisno od  $h$ , ki se ujemata v  $r + 1$  točkah pri istih vrednostih parametrov, torej*

$$\mathbf{f}(s_j) = \mathbf{g}(s_j), \quad j = 0, 1, \dots, r,$$

kjer je  $0 =: s_0 < s_1 < \dots < s_r := h$ . Potem je

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| \leq Ch^{r+1}, \quad (6.30)$$

kjer je  $C$  odvisna le od (odvodov) komponent krivulj  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{g}$  in ne od  $h$ .

**OPOMBA 6.4.1** *Ko velja relacija (6.30) za dovolj majhen  $h$  pravimo, da krivulja  $\mathbf{g}$  aproksimira krivuljo  $\mathbf{f}$  (ali obratno) z asimptotičnim redom aproksimacije  $r + 1$ .*

OPOMBA 6.4.2 Iz (6.30) sledi, da je tudi Hausdorffova razdalja krivulj  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{g}$  omejena s  $Ch^{r+1}$ . To je preprosta posledica definicije 4.7.3 parametrične razdalje in ocene (4.24).

DOKAZ. Naj bo  $\mathbf{p} : [0, h] \rightarrow \mathbb{E}^d$  parametrična polinomska krivulja stopnje  $\leq r$ , ki interpolira točke  $\mathbf{f}(s_j) = \mathbf{g}(s_j)$  pri parametrih  $s_j, j = 0, 1, \dots, r$ . Za vsako komponento  $f_i$  krivulje  $\mathbf{f}$  lahko uporabimo izražavo napake pri polinomske interpolaciji

$$|f_i(s) - p_i(s)| = \frac{|f_i^{(r+1)}(\xi_i)|}{(r+1)!} |(s-s_0)(s-s_1)\cdots(s-s_r)|, \quad s \in [0, h],$$

kjer je  $\xi_i \in [0, h]$ . Torej je tudi

$$\|f_i - p_i\| \leq \frac{M_i(\mathbf{f})}{(r+1)!} h^{r+1},$$

kjer je  $M_i(\mathbf{f}) = \|f_i^{(r+1)}\|_\infty$ . Od tod dobimo

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{p}\| \leq M(\mathbf{f}) h^{r+1}, \quad M(\mathbf{f}) := \frac{1}{(r+1)!} \|\mathbf{f}^{(r+1)}\|.$$

Podobno za krivuljo  $\mathbf{g}$  velja

$$\|\mathbf{g} - \mathbf{p}\| \leq M(\mathbf{g}) h^{r+1}, \quad M(\mathbf{g}) := \frac{1}{(r+1)!} \|\mathbf{g}^{(r+1)}\|.$$

Toda potem je tudi

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| = \|\mathbf{f} - \mathbf{p} + \mathbf{p} - \mathbf{g}\| \leq \|\mathbf{f} - \mathbf{p}\| + \|\mathbf{g} - \mathbf{p}\| \leq (M(\mathbf{f}) + M(\mathbf{g})) h^{r+1}$$

in dokaz je končan.  $\square$

Naj omenimo, da zgornjo lemo lahko posplošimo tudi na primer, ko se krivulji v točkah ujemata večkratno (poleg vrednosti še odvodi, drugi odvodi, ...).

Pri geometrijski interpolaciji lemo največkrat uporabimo v primeru, ko je  $\mathbf{f}$  krivulja, ki jo aproksimiramo,  $\mathbf{p}$  pa geometrijski interpolacijski polinom. Težava pa je pogosto v tem, da se krivulja in polinom ne ujemata pri istih vrednostih parametra, saj imata nemalokrat različni parametrizaciji. Asimptotični red aproksimacije tedaj ne sledi neposredno iz leme, zato moramo uporabiti drugačen pristop. Oglejmo si primer, ko pričakovanega reda aproksimacije ne dosežemo.

PRIMER 6.4.1 Naj bo  $\mathbf{f} : [0, h] \rightarrow \mathbb{E}^2$  definirana kot

$$\mathbf{f}(s) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi s}{2h}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi s}{2h}\right) \end{pmatrix}$$

in  $\mathbf{p} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$  interpolacijski polinom, ki interpolira  $\mathbf{f}(0)$  in  $\mathbf{f}(h)$  pri 0 in 1, torej

$$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}.$$

Ker je Hausdorffova razdalja  $d_H(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (2 - \sqrt{2})/2$  za vsak  $h > 0$ , red aproksimacije krivulje  $\mathbf{f}$  s polinomom  $\mathbf{p}$  ne more biti 2.

Podobno kot v prejšnjem primeru, se da poiskati ravninsko krivuljo, ki se denimo s kubičnim interpolacijskim polinomom ujema v šestih točkah, pa jo slednji aproksimira le z redom 4. Izkaže se, da se to lahko zgodi, če ima (fleksijska) ukrivljenost krivulje na zbranem segmentu ničlo. Primer zahteva kar nekaj računanja in ga bomo izpustili. Pravkar omenjene ugotovitve kažejo, da bo za maksimalni red aproksimacije poleg ujemanja vrednosti krivulj v dovolj velikem številu točk potrebno predpostaviti še nekaj dodatnih lastnosti. Strnimo jih v naslednji izrek.

IZREK 6.4.1 Naj bo  $\mathbf{f} : [0, h] \rightarrow \mathbb{E}^d$ ,  $h > 0$ , dovolj gladka regularna parametrična krivulja in  $\mathbf{p} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^d$  parametrični interpolacijski polinom stopnje  $\leq n \leq r$ , ki se z  $\mathbf{f}$  ujema v  $r + 1$  točkah, torej

$$\mathbf{f}(s_j) = \mathbf{p}(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, r, \quad (6.31)$$

kjer je  $0 =: s_0 < s_1 < \dots < s_r := 1$ ,  $t_0 := 0 < t_1 < \dots < t_r := 1$ . Privzemimo, da sta za dovolj majhen  $h$  prvi komponenti  $f_1$  in  $p_1$  krivulj  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{p}$  obrnljivi funkciji ter zanj velja

$$\begin{aligned} \|f'_1\|_\infty &= C_1(\mathbf{f}) + \mathcal{O}(h), \\ \|\dot{p}_1\|_\infty &= D_1(\mathbf{p})h + \mathcal{O}(h^2), \quad D_1(\mathbf{p}) \neq 0. \end{aligned}$$

Privzemimo še, da so vsi višji odvodi komponent krivulje  $\mathbf{f}$  omejeni s konstanto neodvisno od  $h$ , za višje odvode krivulje  $\mathbf{p}$  pa je

$$\|\mathbf{p}^{(v)}\| = \mathcal{O}(h^v), \quad v = 2, 3, \dots, n.$$

Potem je asimptotični red aproksimacije krivulje  $\mathbf{f}$  s polinomske krivuljo  $\mathbf{p}$  vsaj  $r + 1$ .

DOKAZ. Ker sta komponenti  $f_1 : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$  in  $p_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  obrnljivi funkciji, je  $f_1^{-1} : [f_1(0), f_1(1)] \rightarrow \mathbb{R}$  in  $p_1^{-1} : [p_1(0), p_1(1)] \rightarrow \mathbb{R}$ . Parametrizirajmo krivulji  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{p}$  glede na prvo komponento, torej  $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} \circ f_1^{-1}$  in  $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \circ p_1^{-1}$ . Zaradi (6.31) sta sedaj  $\tilde{\mathbf{f}}$  in  $\tilde{\mathbf{p}}$  parametrizirabi glede na isti parameter  $u \in [f_1(0), f_1(h)] = [p_1(0), p_1(1)]$ . Naj bo  $u_j = f_1(s_j) = p_1(t_j)$ . Potem je

$$\tilde{\mathbf{f}}(u_j) = \mathbf{f}(s_j) = \mathbf{p}(t_j) = \mathbf{p}(p_1^{-1}(u_j)) = \tilde{\mathbf{p}}(u_j), \quad j = 0, 1, \dots, r.$$

Krivulji  $\tilde{\mathbf{f}}$  in  $\tilde{\mathbf{p}}$  se torej ujemata v  $r + 1$  točkah pri istih vrednostih parametrov  $u_j$ . Po lemi 6.4.1 bo  $\tilde{\mathbf{p}}$  aproksimirala  $\tilde{\mathbf{f}}$  z redom aproksimacije  $r + 1$ , če dokažemo omejenost vseh višjih odvodov krivulj do reda  $r + 1$ . Pri tem bomo seveda uporabili predpostavke izreka. Dovolj je dokazati naslednjo lemo:

LEMA 6.4.2 Višji odvodi funkcij  $\tilde{\mathbf{f}}$  in  $\tilde{\mathbf{p}}$  po parametru  $u$  se dajo zapisati v obliki

$$\frac{d^q}{du^q} \tilde{\mathbf{f}}(u) = \sum_{i=1}^q \frac{1}{f_1'(s)^{2^q-1}} \left( \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \prod_{k=1}^{n_{ij}} f_1^{(v_{ijk})}(s) \right) \mathbf{f}^{(i)}(s), \quad (6.32)$$

$$\frac{d^q}{du^q} \tilde{\mathbf{p}}(u) = \sum_{i=1}^q \frac{1}{p_1'(t)^{2^q-1}} \left( \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \prod_{k=1}^{n_{ij}} p_1^{(v_{ijk})}(t) \right) \mathbf{p}^{(i)}(t), \quad (6.33)$$

kjer je

$$i + \sum_{k=1}^{n_{ij}} v_{ijk} = 2^q - 1, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad j = 1, 2, \dots, m_i$$

in so  $a_{ij}$  konstante.

DOKAZ. Konstante in meje seštevanje v lemi so za obe funkciji iste. Zato je dovolj, če na primer dokažemo enakost (6.32). Dokazovali bomo z indukcijo na red odvoda  $q$ . Naj bo  $q = 1$ . Tedaj je

$$\frac{d}{du} \tilde{\mathbf{f}}(u) = \mathbf{f}'(s) \frac{1}{f_1'(s)},$$

kar ustreza desni strani v enakosti (6.32), če izberemo  $m_1 = 0$ . Naj bo sedaj  $q > 1$ . Potem je

$$\frac{d^{q+1}}{du^{q+1}} \tilde{\mathbf{f}}(u) = \frac{d}{du} \left( \sum_{i=1}^q \frac{1}{f_1'(s)^{2^q-1}} \left( \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \prod_{k=1}^{n_{ij}} f_1^{(v_{ijk})}(s) \right) \mathbf{f}^{(i)}(s) \right),$$

saj lahko uporabimo indukcijsko predpostavko za izražavo  $q$ -tega odvoda. Spet z uporabo verižnega pravila in pravila za odvajanje kvocienta funkcij dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{d^{q+1}}{du^{q+1}} \tilde{\mathbf{f}}(u) &= \left( \sum_{i=1}^q \frac{1}{f_1'(s)^{2^q-1}} \left( \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \prod_{k=1}^{n_{ij}} f_1^{(v_{ijk})}(s) \right) \mathbf{f}^{(i)}(s) \right)' \frac{1}{f_1'(s)} \\
&= \sum_{i=1}^q \frac{1}{f_1'(s)^{2^{q+1}-1}} \left( \mathbf{f}^{(i+1)}(s) \left( \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \prod_{k=1}^{n_{ij}} f_1^{(v_{ijk})}(s) \right) f_1'(s)^{2^q-1} \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{f}^{(i)}(s) \left( \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \left( \sum_{k=1}^{n_{ij}} f_1^{(v_{ijk}+1)}(s) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n_{ij}} f_1^{(v_{ij\ell})}(s) \right) \right) f_1'(s)^{2^q-1} \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{f}^{(i)}(s) \left( \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \prod_{k=1}^{n_{ij}} f_1^{(v_{ijk})}(s) \right) (2^q - 1) f_1'(s)^{2^q-2} f_1''(s) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{q+1} \frac{1}{f_1'(s)^{2^{q+1}-1}} \left( \sum_{j=1}^{\tilde{m}_i} \tilde{a}_{ij} \prod_{k=1}^{\tilde{n}_{ij}} f_1^{(\tilde{v}_{ijk})}(s) \right) \mathbf{f}^{(i)}(s),
\end{aligned}$$

kjer je

$$i + \sum_{k=1}^{\tilde{n}_{ij}} \tilde{v}_{ijk} = 2^{q+1} - 1, \quad i = 1, 2, \dots, q+1, \quad j = 1, 2, \dots, \tilde{m}_i$$

in dokaz leme je končan.  $\square$

Iz leme sedaj neposredno sledi tudi rezultat izreka. Višji odvodi krivulj  $\tilde{\mathbf{f}}$  in  $\tilde{\mathbf{p}}$  so omejeni. Za parametre  $u_j$  pa velja

$$u - u_j = f_1(s) - f_1(s_j) = f_1'(\xi)(s - s_j) = \mathcal{O}(h).$$

$\square$

Oglejmo si konkretni primer izpeljave reda aproksimacije.

**PRIMER 6.4.2** Vrnimo se k primeru Hermiteove interpolacije dveh točk in dveh smeri tangent s parametrično parabolično krivuljo (razdelek 6.2.1). Predpostavimo, da smo podatke dobili kot vrednosti na regularni, konveksni ravninski krivulji  $\mathbf{f} : [0, h] \rightarrow \mathbb{E}^2$ . Ker je  $\mathbf{f}$  regularna v  $\mathbf{f}(0)$ , lahko dodatno predpostavimo

$$\mathbf{f}(s) = \begin{pmatrix} s \\ y(s) \end{pmatrix},$$



where

$$y(s) := \sum_{j=2}^{\infty} y_j s^j.$$

To namreč lahko dosežemo z ustrežno parametrizacijo, translacijo in rotacijo. Ker je  $\mathbf{f}$  po predpostavki konveksna, je  $y_2 \neq 0$ . Sedaj podatke lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_0 &= \mathbf{f}'(0) = (1, 0)^T, \\ \mathbf{d}_1 &= \mathbf{f}'(h) = (1, y'(h))^T, \\ \Delta \mathbf{p}_0 &= \mathbf{f}(h) - \mathbf{f}(0) = (h - 1, y(h))^T. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Po (6.11) je torej

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -2 \frac{y(h) - h y'(h)}{y'(h)} = h + \frac{y_3}{2 y_2} h^2 + \frac{4 y_2 y_4 - 3 y_3^2}{4 y_2^2} h^3 + \mathcal{O}(h^4), \\ \alpha_1 &= 2 \frac{y(h)}{y'(h)} = h - \frac{y_3}{2 y_2} h^2 - \frac{4 y_2 y_4 - 3 y_3^2}{4 y_2^2} h^3 + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

Preverimo sedaj, da so izpolnjene predpostavke izreka 6.4.1. Za funkcijo  $\mathbf{f}$  je omejenost vseh višjih odvodov neodvisno od  $h$  očitna. Ker je  $f'_1(s) = 1 + \mathcal{O}(h)$  je prva komponenta obrnljiva za dovolj majhen  $h$ . Pogoji za interpolacijsko krivuljo pa so izpolnjeni, če je  $\Delta \mathbf{b}_j = h \mathbf{v}_j + \mathcal{O}(h^2)$ ,  $j = 0, 1, 2$ ,  $\mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}$ ,  $\Delta^2 \mathbf{b}_j = \mathcal{O}(h^2)$ ,  $j = 0, 1$ . Z neposrednim računom pridemo do

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{b}_j &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} h + \mathcal{O}(h^2), \quad j = 0, 1, 2, \\ \Delta^2 \mathbf{b}_j &= \begin{pmatrix} -\frac{y_3}{6 y_2} \\ \frac{y_2}{3} \end{pmatrix} h^2 + \mathcal{O}(h^3), \quad j = 0, 1. \end{aligned}$$

Včasih se dokazovanje reda aproksimacije poenostavi. Recimo v primeru, ko aproksimiramo krivuljo prav posebne oblike. V prejšnjem primeru smo pokazali, da je red aproksimacije pri interpolaciji ravninske konveksne krivulje s parabolo v dveh točkah in smereh tangente enak 4. Pri tem smo uporabili rezultate izreka 6.4.1, ki velja tudi za posplošitev na Hermiteovo geometrijsko interpolacijo. V primeru, ko je interpolirana krivulja denimo lok krožnice, je rezultat mogoče dokazati neposredno.

PRIMER 6.4.3 Naj bo  $\mathbf{f} : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{E}^2$  lok enotske krožnice, parametriziran kot

$$\mathbf{f}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [-\alpha, \alpha], \quad 0 < \alpha < \pi/2.$$

S parametrično parabolo želimo interpolirati točki

$$\mathbf{p}_0 = (\cos \alpha, -\sin \alpha)^T, \quad \mathbf{p}_1 = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T.$$

in smeri tangent v teh točkah

$$\mathbf{d}_0 = (\sin \alpha, \cos \alpha)^T, \quad \mathbf{d}_1 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)^T.$$

Če krivuljo  $\mathbf{p}$  zapišemo v Bézierovi obliki, je

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 B_0^2(t) + \mathbf{b}_1 B_1^2(t) + \mathbf{p}_1 B_2^2(t), \quad t \in [0, 1].$$

Ali je mogoče kontrolno točko  $\mathbf{b}_1$  določiti tako, da bo  $\mathbf{p}$  interpolirala točki  $\mathbf{p}_0$  in  $\mathbf{p}_1$  ter smeri tangent  $\mathbf{d}_0$  in  $\mathbf{d}_1$ . Zaradi simetrije mora biti točka  $\mathbf{b}_1$  na abscisni osi. Zaradi interpolacije smeri tangent  $\mathbf{d}_0$  in  $\mathbf{d}_1$  pa mora biti ravno presečišče premice, ki poteka skozi  $\mathbf{p}_0$  v smeri  $\mathbf{d}_0$  in premice skozi  $\mathbf{p}_1$  v smeri  $\mathbf{d}_1$ . Od tod dobimo

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \alpha} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sec \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Krivuljo  $\mathbf{p}$  lahko torej zapišemo kot

$$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} B_0^2(t) + \begin{pmatrix} \sec \alpha \\ 0 \end{pmatrix} B_1^2(t) + \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} B_2^2(t). \quad (6.35)$$

Ne spreglejte, da je pogoj  $\alpha < \pi/2$  potreben, saj se sicer zgoraj omenjeni premici ne sekata ali pa se ne sekata na pozitivnem delu abscisne osi.

Sedaj bomo pokazali, da je  $d_H(\mathbf{f}, \mathbf{p}) \leq C \alpha^4$  za dovolj majhne kote  $\alpha$ . Od tod sledi red aproksimacije 4. Hausdorffovo razdaljo  $d_H$  bomo ocenili navzgor z  $\|\mathbf{f} - \mathbf{p}\|$  pri čemer bomo obe krivulji reparametrizirali glede na isti parameter. Oglejmo si namreč žarek skozi izhodišče pod kotom  $\varphi \in [-\alpha, \alpha]$  glede na abscisno os. Ker sta  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{p}$  konveksni krivulji, žarek seka vsako od njih v natanko eni točki. Krožnico kar v točki  $(\cos \varphi, \sin \varphi)^T$ , parabolo pa denimo v točki  $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))^T$ . Iz preproste geometrije sledi, da je  $\varphi = \arctan(y(t)/x(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ . Sedaj lahko za razdaljo med točkama  $\mathbf{f}(\varphi)$  in  $\mathbf{p}(t)$  vzamemo radialno razdaljo

$$\varepsilon(t) := \left\| \mathbf{f} \left( \arctan \frac{y(t)}{x(t)} \right) - \mathbf{p}(t) \right\|_2 = \left| \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - 1 \right|.$$

Očitno je<sup>1</sup>

$$d_H(\mathbf{f}, \mathbf{p}) \leq \max_{t \in [0, 1]} \varepsilon(t).$$

<sup>1</sup>V resnici je Hausdorffova razdalja enaka oceni na desni strani.

Poiskati moramo torej največjo vrednost funkcije  $\varepsilon(t) = \left| \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - 1 \right|$  na  $[0, 1]$ . Očitno je dovolj poiskati ekstreme  $\phi(t) := x(t)^2 + y(t)^2$ . Iz (6.35) dobimo

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \left( \cos \alpha (1-t)^2 + 2 \sec \alpha t (1-t) + \cos \alpha t^2 \right)^2 \\ &\quad + \left( -\sin \alpha (1-t)^2 + \sin \alpha t^2 \right)^2. \end{aligned}$$

Toda  $\phi$  lahko zapišemo v Bézierovi obliki

$$\phi(t) = B_0^4(t) + B_1^4(t) + \frac{2 \sec \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{3} B_2^4(t) + B_3^4(t) + B_4^4(t).$$

Iz zapisa je razvidno, da sta ekstrema (minimuma) pri  $t = 0$  in  $t = 1$ . Zaradi simetrije pa mora biti tretji ekstrem (maksimum) pri  $t = 1/2$ . Tako dobimo, da je

$$\max_{t \in [0,1]} \varepsilon(t) = \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2 \cos \alpha}.$$

Z razvojem v vrsto dobimo

$$d_H(\mathbf{f}, \mathbf{p}) \leq \frac{\alpha^4}{8} + \frac{\alpha^6}{24} + \mathcal{O}(\alpha^8).$$

# Poglavje 7

## Krivulje s pitagorejskim hodografom

V tem poglavju se bomo posvetili posebnim parametričnim polinomskim krivuljam. Imenujemo jih krivulje s *pitagorejskim hodografom* ali na kratko *PH krivulje*. Zaradi enostavnosti si bomo najprej ogledali ravninske krivulje, čeprav lahko rezultate posplošimo tudi na krivulje v večdimenzionalnih prostorih.

### 7.1 Ravninske PH krivulje

Krivulje s pitagorejskim hodografom lahko definiramo popolnoma algebraično.

DEFINICIJA 7.1.1 Naj bo  $\mathbf{p} : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$  ravninska parametrična krivulja oblike  $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))^T$ , kjer sta  $x$  in  $y$  polinoma stopnje  $\leq n$ . Hodograf krivulje je preslikava  $\mathbf{p}' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , kjer je  $\mathbf{p}'(t) = (x'(t), y'(t))^T$ . Krivulja  $\mathbf{p}$  ima pitagorejski hodograf (je PH krivulja), če obstaja tak polinom  $\sigma$ , da je

$$\|\mathbf{r}'(t)\|^2 = \sigma^2(t),$$

torej

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sigma(t)^2, \quad t \in [a, b].$$

Če je krivulja v prejšnji definiciji regularna, ima v vsaki točki  $t \in [a, b]$  neničelni hodograf, zato lahko pogoj za PH krivuljo poenostavimo v

$$\|\mathbf{p}'(t)\| = \sigma(t), \quad t \in [a, b].$$

PRIMER 7.1.1 *Za krivuljo*

$$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} -t^3 + 6t \\ t^3 - 6t^2 + 6t \end{pmatrix}, t \in [0, 1],$$

se zlahka prepričamo, da ima pitagorejski hodograf, saj je

$$\|\mathbf{p}'(t)\| = \sqrt{18}(t^2 - 2t + 2).$$

Njen graf je na sliki ??.

Izkaže se, da PH krivulje lahko karakteriziramo popolnoma algebraično. Velja namreč naslednji izrek:

IZREK 7.1.1 *Naj bodo  $p, q$  in  $r$  polinomi. Pitagorejski pogoj*

$$p^2(t) + q^2(t) = r^2(t)$$

je (do vrstnega reda polinomov  $p$  in  $q$ ) izpolnjen natanko tedaj, ko obstajajo taki polinomi  $u, v$  in  $w$ , da je

$$p(t) = (u^2(t) - v^2(t)) w(t),$$

$$q(t) = 2u(t)v(t)w(t),$$

$$r(t) = (u^2(t) + v^2(t)) w(t).$$

Dokaz izreka v eno smer je trivialen. Drugi del pa je malce bolj zapleten in ga bomo izpustili. Bralci lahko najdejo dokaz še za nekoliko bolj splošni primer v [18].

Iz izreka 7.1.1 sedaj neposredno sledi, da ima krivulja  $\mathbf{p}$  pitagorejski hodograf natanko tedaj, ko sta njeni komponenti  $x$  in  $y$  oblike

$$x'(t) = (u^2(t) - v^2(t)) w(t), \quad y'(t) = 2u(t)v(t)w(t). \quad (7.1)$$

Pri tem seveda lahko vrstni red  $x$  in  $y$  zamenjamo, vendar to za krivuljo pomeni le spremembo koordinatnega sistema, zato bomo v nadaljevanju, kadar bo potrebno, uporabili samo gornjo karakterizacijo. Prav tako se lahko omejimo samo na primer, ko nobeden od polinomov  $u, v$  in  $w$  ni identično nič,  $u$  in  $v$  pa sta tuja ter vsaj eden ni konstanta. Ko namreč kakšen od slednjih pogojev ni izpolnjen, pridemo do enega od naslednjih primerov:

- a) Če je  $w \equiv 0$  ali  $u \equiv v \equiv 0$ , potem je  $x' \equiv y' \equiv 0$  in krivulja se izrodi v eno samo točko.

- b) Če so vsi trije polinomi konstante, kjer je  $w$  in vsaj eden od  $u$  ali  $v$  neničelen, je parametrična krivulja enakomerno parametrizirana daljica.
- c) Če sta  $u$  in  $v$  konstanti,  $uv \neq 0$ , in  $w$  ni konstanta, je krivulja spet daljica, parametrizirana neenakomerno (ponavadi večkrat prekrita).
- d) Krivulja je neenakomerno parametrizirana daljica (vzporedna abscisni osi) tudi tedaj, ko je  $w \neq 0$  in je eden od polinomov  $u$  ali  $v$  ničelen.

Iz algebraične karakterizacije PH krivulj sledita tudi naslednji dve lemi.

LEMA 7.1.1 Če je  $\lambda = \deg(w)$  in  $\mu = \max\{\deg(u), \deg(v)\}$ , je krivulja, katere hodograf je (7.1), stopnje  $n = \lambda + 2\mu + 1$ .

LEMA 7.1.2 PH krivulje stopnje  $n$  imajo kvečjemi  $n + 3$  prostostne stopnje (v primerjavi z  $2n + 2$  prostostnimi stopnjami splošnih parametričnih polinomskih krivulj stopnje  $n$ ).

DOKAZ. Naj bo  $\mu = \max\{\deg(u), \deg(v)\}$ . Torej je vsak od polinomov  $u$  in  $v$  določen z največ  $\mu + 1$  koeficienti. Če je  $\lambda = \deg(w)$ , je  $w$  določen z  $\lambda$  koeficienti, saj lahko predpostavimo, da je njegov vodilni koeficient enak 1. Torej lahko poljubno izberemo  $\lambda + 2(\mu + 1)$  koeficientov, ko določamo  $u$ ,  $v$  in  $w$ . S tem je hodograf določen, krivuljo pa dobimo z integracijo, kar prinese še dva prosta parametra, skupaj torej  $\lambda + 2\mu + 4$ , kar je po prvi lemi natanko  $n + 3$ .  $\square$

Izrek 7.1.1 sicer podaja lepo algebraično karakterizacijo ravninskih PH krivulj. Vendar se v CAGD ponavadi ukvarjamo s polinomskimi krivuljami, ki so zapisane v posebni, recimo Bézierovi obliki. Zato nas zanima, ali se da karakterizacijo PH krivulj v Bézierovi obliki izraziti v obliki geometrijske interpretacije? Odgovor na to vprašanje sledi v naslednjem razdelku.

## 7.2 Kontrolne točke Bézierovih PH krivulj

Če zahtevamo, da je PH krivulja regularna, potem v karakterizaciji (7.1) polinom  $w$  ne sme imeti realne ničle, polinoma  $u$  in  $v$  pa morata biti tuja. Zato se ponavadi omejimo na t.i. primitivne PH krivulje. Zanje sta  $u$  in  $v$

tuja,  $w$  pa je identično enak 1. Najprej si oglejmo netrivialni primer primitivne PH krivulje najnižje možne stopnje, torej 3. Iz izreka (7.1) tedaj sledi, da sta  $u$  in  $v$  tuja si linearna polinoma. Zapišimo ju v Bézierovi obliki

$$u(t) = u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t), \quad v(t) = v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t).$$

Ker smo privzeli, da sta  $u$  in  $v$  tuja, mora biti  $u_0 v_1 \neq u_1 v_0$ . Iz pogoja, da  $u$  in  $v$  nista oba konstanti, pa še  $(u_0 - u_1)^2 + (v_0 - v_1)^2 \neq 0$ . Potem je po (7.1)

$$\begin{aligned} x'(t) &= (u_0^2 - v_0^2) B_0^2(t) + (u_0 u_1 - v_0 v_1) B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2) B_2^2(t), \\ y'(t) &= 2 u_0 v_0 B_0^2(t) + (u_0 v_1 + u_1 v_0) B_1^2(t) + 2 u_1 v_1 B_2^2(t). \end{aligned}$$

Z integriranjem in uporabo (3.4) dobimo kubično Bézierovo krivuljo

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 B_0^3(t) + \mathbf{p}_1 B_1^3(t) + \mathbf{p}_2 B_2^3(t) + \mathbf{p}_3 B_3^3(t),$$

za katero je

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3} \left( u_0^2 - v_0^2, 2 u_0 v_0 \right)^T, \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3} \left( u_0 u_1 - v_0 v_1, u_0 u_1 + v_0 v_1 \right)^T, \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{3} \left( u_1^2 - v_1^2, 2 u_1 v_1 \right)^T, \end{aligned} \quad (7.2)$$

kjer je  $\mathbf{p}_0$  poljubna točka (zaradi integriranja).

Toda zgornje pogoje lahko izrazimo s pogoji na kontrolni poligon kubične Bézierove krivulje.

**IZREK 7.2.1** *Naj bo  $\mathbf{p}$  kubična Bézierova krivulja s kontrolnimi točkami  $\mathbf{p}_j \in \mathbb{E}^2$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ . Označimo z  $L_j := \|\Delta \mathbf{p}_{j-1}\|$ ,  $j = 0, 1, 2$ , in naj bosta  $\theta_1$  in  $\theta_2$  kota med stranicami kontrolnega poligona pri kontrolnih točkah  $\mathbf{p}_1$  in  $\mathbf{p}_2$ . Potem ima  $\mathbf{p}$  pitagorejski hodograf natanko tedaj, ko je*

$$L_1 = \sqrt{L_0 L_2} \quad \text{in} \quad \theta_1 = \theta_2. \quad (7.3)$$

**DOKAZ.** Denimo, da je  $\mathbf{p}$  kubična PH krivulja s kontrolnimi točkami (7.2). Neposredno izračunamo

$$\begin{aligned} L_0 &= \|\Delta \mathbf{p}_0\| = \frac{1}{3} \left( u_0^2 + v_0^2 \right), \\ L_1 &= \|\Delta \mathbf{p}_1\| = \frac{1}{3} \sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}, \\ L_2 &= \|\Delta \mathbf{p}_2\| = \frac{1}{3} (u_1^2 + v_1^2). \end{aligned}$$

Od tod neposredno sledi  $L_1 = \sqrt{L_0 L_2}$ . Sinusa in kosinusa kotov  $\theta_1$  in  $\theta_2$  lahko izrazimo kot

$$\begin{aligned}\sin \theta_1 &= \frac{\Delta \mathbf{p}_1 \times \Delta \mathbf{p}_0}{L_1 L_0} = \frac{u_1 v_0 - u_0 v_1}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}, \\ \sin \theta_2 &= \frac{\Delta \mathbf{p}_2 \times \Delta \mathbf{p}_1}{L_2 L_1} = \frac{u_1 v_0 - u_0 v_1}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}, \\ \cos \theta_1 &= -\frac{\Delta \mathbf{p}_1 \cdot \Delta \mathbf{p}_0}{L_1 L_0} = -\frac{u_0 u_1 + v_0 v_1}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}, \\ \cos \theta_2 &= -\frac{\Delta \mathbf{p}_2 \cdot \Delta \mathbf{p}_1}{L_2 L_1} = -\frac{u_0 u_1 + v_0 v_1}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}.\end{aligned}$$

Ker sta sinusa in kosinusa kotov enaka, sta enaka tudi sama kota. Torej je  $\theta_1 = \theta_2$ .

Privzemimo sedaj, da je  $\mathbf{p}$  kubična Bézierova krivulja, ki zadošča pogojema (7.3). Pišimo na kratko  $\theta := \theta_1 = \theta_2$ . Z rotacijo in translacijo (ki ne spreminita dolžin in kotov) lahko koordinatni sistem izberemo tako, da imajo stranice kontrolnega poligona naslednjo izražavo:

$$\Delta \mathbf{p}_0 = L_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta \mathbf{p}_1 = \sqrt{L_0 L_2} \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \Delta \mathbf{p}_2 = L_2 \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ -\sin 2\theta \end{pmatrix}$$

Potem je

$$\|\mathbf{p}'(t)\|^2 = \left\| 3 \sum_{j=0}^2 \Delta \mathbf{p}_j B_j^2(t) \right\|^2 = \sum_{j=0}^4 c_j B_j^4(t),$$

kjer je

$$\begin{aligned}c_0 &= 9 L_0^2, & c_1 &= -9 L_0 \sqrt{L_2} \cos \theta, \\ c_2 &= 3 L_0 L_2 (2 + \cos 2\theta), \\ c_3 &= -9 L_2 \sqrt{L_0} \cos \theta, & c_4 &= 9 L_2^2.\end{aligned}$$

Z nekaj računanja ugotovimo, da je

$$\sum_{j=0}^4 c_j B_j^4(t) = \left( 3 \left( L_0 B_0^2(t) - \sqrt{L_0 L_2} \cos \theta B_1^2(t) + L_2 B_2^2(t) \right) \right)^2 =: \sigma^2(t)$$

Torej je  $\mathbf{p}'$  PH krivulja, saj je  $\|\mathbf{p}'(t)\|^2 = \sigma^2(t)$ . Dokaz je s tem končan.  $\square$



Dokazati se da, da ima vsaka kubična PH krivulja natanko eno samo-presečišče. Vsako tako kubično krivuljo lahko zapišemo v t.i. *standardni obliki*. Če namreč ustrezno izberemo koordinatni sistem in parametrizacijo, se izraža kot

$$x(t) = p(t^2 - 1), \quad y(t) = q(t - \alpha)(t^2 - 1).$$

Sedaj pa o kubičnih PH krivuljah lahko povemo še več.

**IZREK 7.2.2** *V standardni obliki je vsaka kubična PH krivulja natanko ena iz enoparametrične družine Tschirnhausenovih krivulj*

$$x(t) = p(t^2 - 1), \quad y(t) = \frac{\pm p}{\sqrt{3}} t(t^2 - 1).$$

Dokaz slednjega izreka lahko najdemo v [11].

Karakterizacija PH krivulj višje stopnje je precej težja naloga. Še posebej, če žlimo poiskati karakterizacijo, ki temelji na geometrijskih količinah. Zato si bomo v naslednjem razdelku ogledali drugačen pristop k definiciji PH krivulj, s pomočjo kompleksnih števil.

## 7.3 Kompleksna reprezentacija PH krivulj

Vsako ravninsko parametrično krivuljo lahko predstavimo kot kompleksno funkcijo realne spremenljivke  $t \in [a, b]$ . Tako lahko denimo premico predstavimo kot  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{z}_1 t + \mathbf{z}_0$ ,  $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1 \in \mathbb{C}$ . Podobno lahko definiramo Bézierovo krivuljo v kompleksni obliki

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{z}_k B_k^n(t), \quad t \in [0, 1], \mathbf{z}_k \in \mathbb{C}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (7.4)$$

Vse pomembne lastnosti Bézierovih krivulj se sedaj neposredno prenesejo tudi na kompleksno reprezentacijo.

Hodograf krivulje (7.4) se torej izraža kot  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{r}'(t)$ , kjer je

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{w}_k B_k^{n-1},$$

pri čemer je

$$\mathbf{w}_k = n \Delta \mathbf{z}_k.$$

Sedaj opazimo, da je za parametrično krivuljo  $\mathbf{r}$ , ki je zapisana v kompleksni obliki  $\mathbf{r}(t) = u(t) + \mathbf{i} v(t)$ , kjer  $u$  in  $v$  nimata skupne ničle,

$$\mathbf{r}^2(t) = u^2(t) - v^2(t) + \mathbf{i} 2 u(t) v(t).$$

Po izreku 7.1.1 je  $\mathbf{r}^2$  hodograf neke regularne PH krivulje.

Tako smo prišli do naslednje zanimive konstrukcije: izberimo parametrično polinomsko krivuljo  $\mathbf{w}$  v kompleksni obliki, kvadrirajmo in integrirajmo. Po prejšnjih razmislekih smo dobili PH krivuljo

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{r}^2(t) dt. \quad (7.5)$$

Prišli smo torej do preproste konstrukcije PH krivulj s pomočjo kompleksne reprezentacije. Z zgoraj opisano konstrukcijo lahko preverimo naslednje dejstvo:

LEMA 7.3.1 *Obstaja bijektivna korespondenca med množico vseh regularnih parametričnih PH krivulj stopnje  $2n + 1$  in množico regularnih parametričnih krivulj stopnje  $n$ .*

PRIMER 7.3.1 *Vzemimo kompleksno premico  $\mathbf{w}(t) = 1 + \mathbf{i} t$ . Potem je  $\mathbf{w}^2(t) = 1 - t^2 + \mathbf{i} 2t$ . Po integriranju dobimo*

$$\mathbf{r}(t) = t - \frac{t^3}{3} + \mathbf{i} t^2 + \mathbf{z}_0,$$

za katero zlahka preverimo, da je PH krivulja, saj je

$$(1 - t^2)^2 + 4t^2 = (1 + t^2)^2.$$

Podobno za krivuljo  $\mathbf{w}(t) = t + \mathbf{i} (2t^2 + 1)$  dobimo

$$\mathbf{r}(t) = \int \left( -1 - 3t^2 - 4t^4 + \mathbf{i} (2t + 4t^3) \right) dt.$$

Spet opazimo, da je

$$(-1 - 3t^2 - 4t^4)^2 + (2t + 4t^3)^2 = (1 + 5t^2 + 4t^4)^2,$$

zato je  $\mathbf{r}$  PH krivulja stopnje 5.

Sedaj lahko zapišemo karakterizacijo kontrolnih točk regularne PH krivulje stopnje  $2n - 1$ .

IZREK 7.3.1 Kontrolne točke  $\mathbf{z}_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2n - 2$ , regularne Bézierove PH krivulje stopnje  $2n - 1$ , se izražajo z  $n$  kompleksnimi vrednostmi  $\mathbf{w}_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , rekurzivno takole

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + \frac{1}{2n-1} \sum_{j=\max\{0, k-n+1\}}^{\min\{k, n-1\}} \frac{\binom{n-1}{j} \binom{n-1}{k-j}}{\binom{2n-2}{j+k}} \mathbf{w}_j \mathbf{w}_{k-j}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n - 2.$$

Pri tem je  $\mathbf{z}_0$  poljubno kompleksno število, kompleksna števila  $\mathbf{w}_k$  pa določajo kompleksno Bézierovo krivuljo, ki ne gre skozi izhodišče.

DOKAZ. Dokaz je pravzaprav preprost račun z Bézierovimi krivuljami. Krivuljo  $\mathbf{w}$ , ki jo določajo kontrolne točke  $\mathbf{w}_k$ , najprej kvadriramo. Upoštevamo zvezo za produkte Bernsteinovih polinomov

$$B_j^{n-1}(t) B_k^{n-1}(t) = \frac{\binom{n-1}{j} \binom{n-1}{k}}{\binom{2n-2}{j+k}} B_{j+k}^{2n-2}(t),$$

nato pa še formulo (3.4) za integracijo Bernsteinovega polinoma.  $\square$

Iz prejšnjega izreka za kubične krivulje dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= \mathbf{z}_0 + \frac{1}{3} \mathbf{w}_0^2, \\ \mathbf{z}_2 &= \mathbf{z}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1, \\ \mathbf{z}_3 &= \mathbf{z}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{w}_1^2. \end{aligned}$$

Da bo krivulja regularna, mora biti še  $\text{Im}(\overline{\mathbf{w}}_0 \mathbf{w}_1) \neq 0$ . Od tod hitro vidimo, da je

$$3 \Delta \mathbf{z}_0 = \mathbf{w}_0^2, \quad 3 \Delta \mathbf{z}_1 = \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1, \quad 3 \Delta \mathbf{z}_2 = \mathbf{w}_1^2,$$

oziroma

$$(\Delta \mathbf{z}_1)^2 = \Delta \mathbf{z}_2 \Delta \mathbf{z}_0. \quad (7.6)$$

Zadnji pogoj je ekvivalenten pogojema iz izreka 7.2.1.

Tudi iz kompleksne reprezentacije PH krivulj je torej mogoče izpeljati geometrijske zveze, kot je na primer (7.6).

# Poglavje 8

## Dodatek A

### 8.1 Rezultante

V tem dodatku si bomo ogledali rezultanto dveh skalarnih polinomov  $p$  in  $q$  ....

# Literatura

- [1] Hiroshi Akima. A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures. *J. of the ACM*, 17(4):589–602, 1970.
- [2] Brian Barsky and Tony D. DeRose. Deriving the beta-constraints for geometric continuity of parametric curves. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 63:49–87 (1995), 1993. New aspects of numerical analysis in the light of recent technology (Stresa, 1993).
- [3] Brian A. Barsky. *Computer graphics and geometric modeling using beta-splines*, volume 2 of *Computer Science Workbench*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [4] Melvin S. Berger. *Nonlinearity and functional analysis*. Academic Press, New York, 1977.
- [5] W. Böhm. Cubic B-spline curves and surfaces in computer aided geometric design. *Computing*, 19(1):29–34, 1977/78.
- [6] E. Catmull and R. Rom. A class of local interpolating splines. In *Computer Aided Geometric Design*, pages 317–326. Academic Press, 1974.
- [7] Carl de Boor. Cutting corners always works. *Comput. Aided Geom. Design*, 4(1-2):125–131, 1987.
- [8] Gerald Farin. Visually  $C^2$  cubic splines. *Comput. Aided Design*, 14(3):137–139, 1982.
- [9] Gerald Farin. Some remarks on  $V^2$ -splines. *Comput. Aided Geom. Design*, 2(4):325–328, 1985.
- [10] Gerald Farin. *Curves and surfaces for computer-aided geometric design*. Computer Science and Scientific Computing. Academic Press Inc., San Diego, CA, fourth edition, 1997.

- 
- [11] Rida T. Farouki. *Pythagorean-hodograph curves: algebra and geometry inseparable*, volume 1 of *Geometry and Computing*. Springer, Berlin, 2008.
- [12] Michael S. Floater. On the deviation of a parametric cubic spline interpolant from its data polygon. *Comput. Aided Geom. Design*, 25(3):148–156, 2008.
- [13] Ronald N. Goldman. Illicit expressions in vector algebra. *ACM Trans. Graph.*, 4(3):223–243, 1985.
- [14] Tim Goodman. Properties of  $\beta$ -splines. *J. Approx. Theory*, 44(2):132–153, 1985.
- [15] John A. Gregory. Geometric continuity. In *Mathematical methods in computer aided geometric design (Oslo, 1988)*, pages 353–371. Academic Press, Boston, MA, 1989.
- [16] Klaus Höllig and Jürgen Koch. Geometric Hermite interpolation with maximal order and smoothness. *Comput. Aided Geom. Design*, 13(8):681–695, 1996.
- [17] Jernej Kozak and Emil Žagar. Geometric interpolation of data in  $R^3$ . In *Proceedings of the Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing*, pages 245–252. Springer, Dordrecht, 2005.
- [18] K. K. Kubota. Pythagorean triples in unique factorization domains. *Amer. Math. Monthly*, 79:503–505, 1972.
- [19] Tom Lyche and Knut Mørken. A metric for parametric approximation. In *Curves and surfaces in geometric design (Chamonix-Mont-Blanc, 1993)*, pages 311–318. A K Peters, Wellesley, MA, 1994.
- [20] Gregory M. Nielson and Thomas A. Foley. A survey of applications of an affine invariant norm. In *Mathematical methods in computer aided geometric design (Oslo, 1988)*, pages 445–467. Academic Press, Boston, MA, 1989.
- [21] Albert Overhauser. *Analytic definition of curves and surfaces by parabolic blending*. Ford Motor Company, 1968.
- [22] Jun-Hai Yong and Fuhua Cheng. Geometric Hermite curves with minimum strain energy. *Comput. Aided Geom. Design*, 21(3):281–301, 2004.