Funkcijski zlepki

Uvod

- Pri polinomski interpolaciji smo spoznali, da višanje stopnje interpolacijskega polinoma (torej interpolacija čedalje večjega števila točk) ne porodi vedno tudi boljše aproksimacije.
- Rungejev protiprimer.
- Ena od možnih rešitev je interpolacija s polinomi nizkih stopenj, ki jih zlepimo v *zlepke*.
- V točkah, kjer posamezne dele zlepka spojimo, zahtevamo gladkost: zveznost, zvezno odvedljivost, zveznost višjih odvodov,...

Primer

Primer zlepka dveh funkcij, ki se stakneta v točki $x = 0$, je denimo

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - 1, & x \leq 0, \\ x^2, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Določite največje število $k \in \mathbb{N}$, za katerega je $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$.

Definicija

Naj bo $f_1 : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ *in* $f_2 : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, $x_0 < x_1 < x_2$. *Funkciji* f_1 *in* f_2 *sta zvezni reda* $k \in \mathbb{N}$ *v točki* x_1, *če je*

$$f_1^{(j)}(x_1 - 0) = f_2^{(j)}(x_1 + 0), \quad j = 0, 1, \ldots, k.$$

Pri tem je $f(a - 0)$ *leva limita funkcije* f *v točki* a *in* $f(a + 0)$ *desna limita funkcije* f *v točki* a.

- Za $k = 0$ iz zgornje definicije denimo sledi, da mora biti $f_1(x_1) = f_2(x_1)$.
- Pri $k > 0$ pa moramo upoštevati ustrezne leve in desne limite višjih odvodov.

- Funkciji $f : [x_0, x_2] \to \mathbb{R}$, definirani s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [x_0, x_1], \\ f_2(x), & x \in [x_1, x_2], \end{cases}$$

  rečemo (funkcijski) zlepek na intervalu $[x_0, x_2]$ z delilnimi točkami (vozli) x_0, x_1, x_2.
- Funciji f_1 in f_2 sta lahko praktično kakršnikoli (polinoma, trigonometrični, eksponentni, kombinacija omenjenih, ...)
- V praksi se najvrečkrat omejimo na polinomske zlepke.
- Čeprav se pri polinomskih zlepkih stopnja s segmenti načeloma spreminja, ponavadi zahtevamo, da so polinomi na vseh segmentih enakih stopenj.

Linearni interpolacijski zlepki

- Dano je zaporedje delilnih točk $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ in vrednosti y_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.
- Iščemo odsekoma linearno funkcijo (linearni zlepek) $S : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$,

$$S_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_1([x_i, x_{i+1}]), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

  ki interpolira točke (x_i, y_i).
- Očitno je enolično določena kot

$$S_{|[x_i, x_{i+1}]}(x) =: S_i(x) = y_i + k_i\,(x - x_i),$$

  kjer je

$$k_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

- Dobre lastnosti linearnih zlepkov so:
  - enostavna konstrukcija,
  - preprosta predstavitev,
  - hitra izračunljivost.
- Glavna pomankljivost je nizka stopnja gladkosti ($\mathcal{C}^0$ zveznost).
- Zato ponavadi študiramo zlepke višjih stopnej, kvadratične, kubične, stopnje 4 ali stopnje 5.
- V praksi so pomembnejši zlepki lihih stopenj, med najpomembnejšimi so kubični in stopnje 5. Ostale stopnje so večinoma že previsoke.

Paraboliči interpolacijski zlepki

- Ponovno imamo podane iterpolacijske točke (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$.
- Iščemo odsekoma kvadratno funkcijo (parabolični zlepek) $S : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$,

$$S_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_2([x_i, x_{i+1}]), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

  ki interpolira točke (x_i, y_i).
- Ker smo zvišali stopnjo polinomov upamo, da lahko izpolnimo pogoje višje gladkosti v delilnih točkah.
- Podobno kot pri linearnih zlepkih pišemo

$$S_{|[x_i, x_{i+1}]}(x) := S_i(x) = a_i + b_i\,(x - x_i) + c_i\,(x - x_i)^2,$$

  $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

- Število prostostnih stopenj (po doma"e neznank) je $3\,n$.
- Število pogojev (enačb) za interpolacijo je $n+1$.
- Razliko $3\,n-(n+1)=2\,n-1$ lahko izkoristimo za višanje gladkosti paraboličnega zlepka.
- Število enačb
  - za zveznost je $n-1$,
  - za zvezno odvedljivost je $n-1$.
- Ostane nam še ena prostostna stopnja, ki jo lahko uporabimo na različne načine: odločimo se denimo, da je $S''(x_0)=0$. (Kaj ta pogoj geometrijsko pomeni za prvi segment?)

- Interpolacijski pogoji implicirajo zveze

$$S_i(x_i) = a_i = y_i, \quad i = 0, 1, n-1$$

in

$$y_{n-1} + b_{n-1}\, h_{n-1} + c_{n-1}\, h_{n-1}^2 = y_n,$$

kjer je $h_i = x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$.

- Iz pogojev zveznosti $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n-2$ v notranjih delilnih točkah dobimo

$$y_i + b_i\, h_i + c_i\, h_i^2 = y_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-2.$$

- Iz pogojev zveznosti prvih odvodov $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n-2$ v notranjih delilnih točkah pa še

$$b_i + 2\, c_i\, h_i = b_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-2.$$

- Iz pogoja $S''(x_0) = 0$ sledi

$$c_0 = 0.$$

- Dobili smo sistem linearnih enačb za neznanke a_i, b_i, c_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, ki ga lahko zapišemo v matrični obliki:

$$
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & \\
h_0^2 & h_0 & & & & & & \\
2\,h_0 & 1 & 0 & -1 & & & & \\
 & & h_1^2 & h_1 & & & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
 & & & & \vdots & & & \\
 & & & & \vdots & & & \\
 & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & & & h_{n-2}^2 & h_{n-2} & & \\
 & & & & 2\,h_{n-2} & 1 & 0 & -1 \\
 & & & & & & h_{n-1}^2 & h_{n-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
c_0 \\ b_0 \\ c_1 \\ b_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ b_{n-3} \\ c_{n-2} \\ b_{n-2} \\ c_{n-1} \\ b_{n-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ \Delta y_0 \\ 0 \\ \Delta y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \Delta y_{n-3} \\ 0 \\ \Delta y_{n-2} \\ 0 \\ \Delta y_{n-1}
\end{bmatrix}
$$

Sistem lahko rešimo neposredno z metodo substitucije:

$$a_0 = y_0, \quad b_0 = \frac{\Delta y_0}{h_0}, \quad c_0 = 0$$

$$a_i = y_i, \quad b_i = b_{i-1} + 2\, c_{i-1}\, h_{i-1}, \quad c_i = \frac{1}{h_i^2}\left(\Delta y_i - b_i\, h_i\right), \; i = 1, \ldots, n-1.$$

$\mathcal{C}^2$ zvezni kubični zlepki

- Kot pri prejšnjih dveh problemih imamo podane iterpolacijske točke (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$.
- Iščemo odsekoma kubično funkcijo (kubični zlepek) $S : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$,

$$S_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_3([x_i, x_{i+1}]), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

  ki interpolira točke (x_i, y_i).
- Ker smo zvišali stopnjo polinomov upamo, da lahko izpolnimo pogoje še višje gladkosti v delilnih točkah.
- Podobno kot pri paraboličnih zlepkih pišemo

$$S_{|[x_i, x_{i+1}]}(x) := S_i(x) = a_i + b_i\,(x - x_i) + c_i\,(x - x_i)^2 + d_i\,(x - x_i)^2,$$

  $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

- Podobno štetje enačb in neznank (parametrov) kot v prejšnjem primeru razkrije:
  - $4\,n - 2$ enačb,
  - $4\,n$ neznank.
- Izpolnimo torej lahko še dva dodatna pogoja, denimo:
  - $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, naravni kubični zlepek,
  - $S'(x_0 = \alpha$, $S'(x_n) = \beta$, kubični zlepek s predpisanimi prvimi odvodi,
  - $S(x_0) = S(x_n)$, $S'(x_0) = S'(x_n)$, $S''(x_0) = S''(x_n)$, periodični kubični zlepek s periodo $x_n - x_0$,
  - S''' je zvezna funkcija v x_1 in x_{n-1}, kubični zlepek brez dodatnih pogojev,
  - $S''(x_0) = \gamma$, $S''(x_n) = \delta$, posplošeni naravni kubični zlepek,
  - $S'''(x_0) = \epsilon$, $S'''(x_n) = \eta$, kubični zlepek s predpisanimi tretjimi odvodi na robu.

- Izkaže se, da je sistem enačb, ki ga dobimo iz interpolacijskih pogojev, pogojev zveznosti prvega in drugega odvoda v delilih točkah ter s še dvema pogojema iz prejšnje prosojnice, vedno enolično rešljiv.
- Malce podrobneje si bomo ogledali naravni kubični zlepek.
- Označimo $g_i = S_i''(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, in $g_n := S_i''(x_n)$.
- Ker iščemo naravni zlepek, je $g_0 = g_n = 0$.
- Za ostale neznanke pa se da izpeljati sistem linearnih enačb

$$h_{i-1}\, g_{i-1} + 2\,(h_{i-1} + h_i)\; g_i + h_i\, g_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

- V matrični obliki se sistem glasi $A\boldsymbol{g} = \boldsymbol{b}$, kjer je $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})^\top$, $\boldsymbol{b} = (6(\Delta y_i/h_i - \Delta y_{i-1}/h_{i-1}))_{i=1}^{n-1}$ in

$$A = \begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & & \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ldots \\ & & & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} & \\ & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & \end{pmatrix}$$

- Matrika A je strogo diagonalno dominantna in zato obrnljiva (zakaj??).
- Posledično ima problem konstrukcije naravnega kubičnega zlepka natanko eno rešitev.

Koeficienti segmenta S_i se izražajo takole:

- $$a_i = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

- $$b_i = \frac{\Delta y_i}{h_i} - \frac{2\,h_i\,g_i + h_i\,g_{i+1}}{6}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

- $$c_i = g_i/2, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

- $$d_i = \frac{\Delta g_i}{6\,h_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Primer

Poiščimo naravni kubični zlepek na podatkih $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ *in* $(3,0)$. *Sistem za* g_1 *in* g_2 *se glasi*

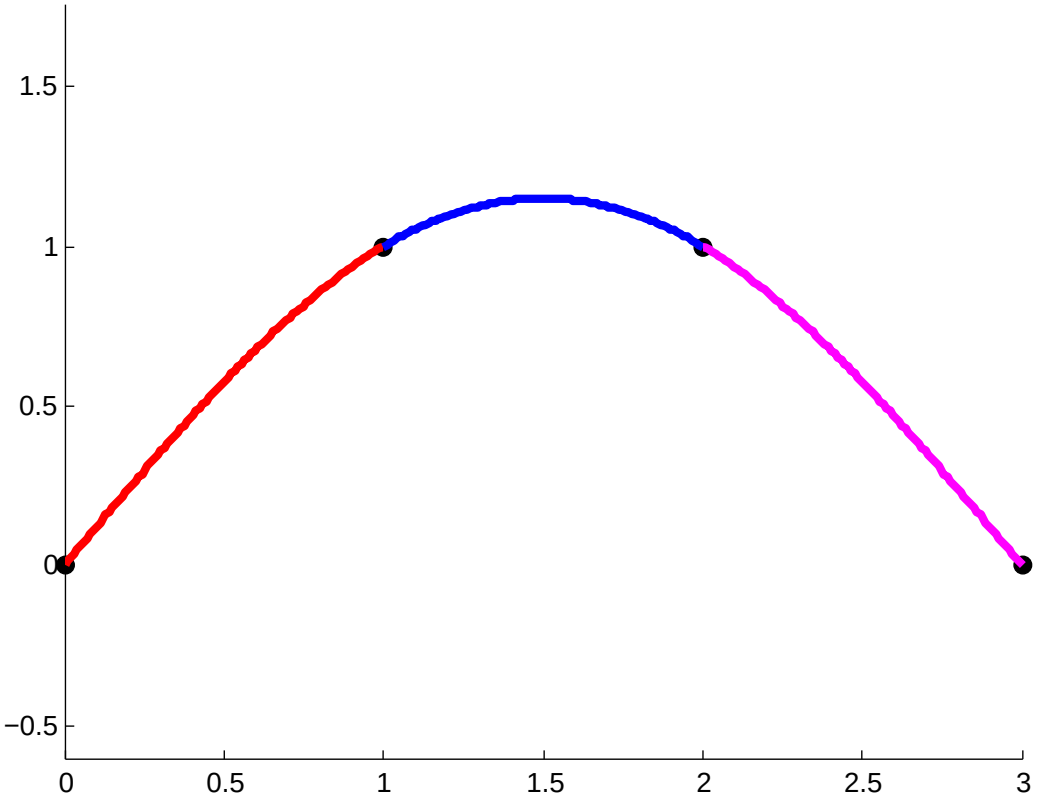
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \text{ kar da } g_1 = g_2 = -6/5.$$

Po formulah s prejšnje prosojnice pa dobimo še:

$$\begin{aligned} &a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \\ &b_0 = 6/5, \quad b_1 = 3/5, \quad b_2 = -3/5, \\ &c_0 = 0, \quad c_1 = -3/5, \quad c_2 = -3/5, \\ &d_0 = -1/5, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 1/5, \end{aligned}$$

torej

$$\begin{aligned} &S_0(x) = \frac{6}{5}x - \frac{1}{5}x^3, \quad S_1(x) = 1 + \frac{3}{5}(x-1) - \frac{3}{5}(x-1)^2, \\ &S_2(x) = 1 - \frac{3}{5}(x-2) - \frac{3}{5}(x-2)^2 + \frac{1}{5}(x-2)^3. \end{aligned}$$



Slika: Graf naravnega kubičnega zlepka iz prejšnjega primera.