# Najboljša enakomerna aproksimacija

# Uvod

- Izberimo $X = C([a,b])$ in njegov podprostor $P_n := \{p;\ p \text{ je polinom stopnje } \leq n\}$.
- Iščemo tak polinom $p^*$, pri katerem je za izbrano funkcijo $f \in X$ dosežen minimum

$$\min_{p \in P_n} \|f - p\|_\infty = \min_{p \in P_n} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)|.$$

- Polinomu $p^*$ rečemo polinom najboljše enakomerne aproksimacije za $f$ na $[a,b]$ v prostoru $P_n$.
- Problem najprej rešimo za končno množico $E \subset [a,b]$.
- Mera za napako bo t.i. minimaks.

# Končna množica

## Definicija

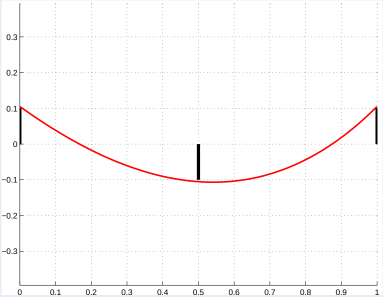
*Minimaks za funkcijo $f \in C([a,b])$ na množici $E \subset [a,b]$ je*

$$M_n(E;f) := \min_{p \in P_n} \|f - p\|_{\infty,E}$$
$$= \min_{p \in P_n} \max_{x \in E} |f(x) - p(x)| =: \mathrm{dist}_{\infty,E}(f, P_n).$$

- Vsaj za končno množico $E$ z dovolj malo elementi znamo poiskati $p^*$: če je $E$ končna z $n+1$ različnimi točkami, je $p^*$ kar interpolacijski polinom stopnje $\leq n$.
- Kaj pa če ima $E$ več kot $n+1$ elementov?

# Primer

*Naj bo* $f(x) = \exp(x)$, $n = 1$ *in* $E = \{a = x_0 = 0, x_1 = 1/2, b = x_2 = 1\}$. *Iščemo torej element najboljše enakomerne aproksimacije v prostoru premic* $p(x) = \alpha\, x + \beta$. *Nekaj računanja pokaže, da je* $\alpha = e - 1$ *in* $\beta = \frac{1}{4}\left(3 + 2\sqrt{e} - e\right)$.




Slika: Residual $r(x) = \exp(x) - \alpha\, x - \beta$ za izračunana koeficienta $\alpha$ in $\beta$ iz primera.

- Rezultat iz primera namiguje na dejstvo, da polinom najboljše aproksimacije "alternira okrog funkcije z enakimi odmiki" na (končni) množici $E$.
- V splošnem nas zanima razlika $r = f - p$ za $p \in P_n$ in $x \in E = \{x_i;\ x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}\}$.
- Definirajmo

$$m := \max_{x \in E} |f(x) - p(x)| = \max_{0 \le i \le n+1} |f(x_i) - p(x_i)|.$$

- Iz prejšnjega primera sklepamo, da je smiselno zapisati

$$r(x_i) = f(x_i) - p(x_i) = (-1)^i\, u_i\, m,$$

kjer so $|u_i|$ deleži, ki jih skušamo uganiti.

- Če $p$ zapišemo v potenčni bazi $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$, moramo rešiti sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} u_0\, m + a_0 + a_1\, x_0 + \cdots + a_n\, x_0^n &= f(x_0) \\ -u_1\, m + a_0 + a_1\, x_1 + \cdots + a_n\, x_1^n &= f(x_1) \\ &\vdots \qquad (1) \\ (-1)^{n+1} u_{n+1}\, m + a_0 + a_1\, x_{n+1} + \cdots + a_n\, x_{n+1}^n &= f(x_{n+1}), \qquad (2) \end{aligned}$$

  pri čemer deleži $u_i$ še niso znani.
- Dokazati se da, da moramo za $u_i$ izbrati vse deleže enake, torej $u := u_i = \pm 1$.
- Predznak izberemo tako, da je $m = |m|$.

## Izrek

*Naj bo $f \in C([a,b])$ in $E = \{x_i;\, x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}\} \subset [a,b]$. Polinom najboljše enakomerne aproksimacije za $f$ na $E$ je določen enolično s sistemom enačb (1), kjer je predznak $u$ določen tako, da je $m = M_n(E; f) > 0$.*

Naslednji izrek poda celo oceno residuala $M_n(E, f)$.

## Izrek

*Naj bo $f \in C([a,b])$ in $E = \{x_i;\, x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}\} \subset [a,b]$. Naj bo $q \in P_n$ polinom, za katerega razlika $r = f - q$ alternirajoče spreminja predznak na množici $E$. Če niso vse vrednosti $|r(x_i)|$ enake, je*

$$\min_{0 \le i \le n+1} |r(x_i)| < M_n(E; f) < \max_{0 \le i \le n+1} |r(x_i)|.$$

# Zvezni primer

Sedaj lahko zapišemo glavni rezultat tega poglavja.

## Izrek

*Naj bo $f \in C([a,b])$. V $P_n$ obstaja enolično določen polinom najboljše enakomerne aproksimacije za $f$ na $[a,b]$. Ujema se s polinomom najboljše enakomerne aproksimacije za $f$ na $E \subset [a,b]$, kjer je $E$ moči $n+2$ in zanjo velja*

$$M_n(E;f) \geq M_n(E';f)$$

*za poljubno množico $E' \subset [a,b]$ moči $n+2$. Velja tudi*

$$M_n([a,b];f) = M_n(E;f).$$

- Poanta zgornjega izreka je: ko iščemo polinom najboljše enakomerne aproksimacije, moramo poiskati tako množico z $n+2$ različnimi elementi, da je minimaks na njej največji med vsemi minimaksi na množicah z $n+2$ elementi.

# Remesov postopek

- Remesov postopek določi element najboljše enakomerne aproksimacije $p^* \in P_n$ za dano funkcijo $f \in C([a,b])$ in zahtevano natančnost ujemanja minimaksa $\varepsilon$.
  1. Izberemo $E_0 = \{x_i;\ a \le x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_{n+1} \le b\}$.
  2. Postavimo $k = 0$ in ponavljamo:
     - 2.1 Določimo $p_k^*$ kot polinom najboljše enakomerne aproksimacije na $E_k$.
     - 2.2 Poiščemo $y \in [a,b]$: $|f(y) - p_k^*(y)| = \|f - p_k^*\|_\infty$.
     - 2.3 Če je $|f(y) - p_k^*(y)| - M_n(E_k; f) < \varepsilon$ končamo.
     - 2.4 Naredimo premenjavo (zamenjamo točko $x_j$ z $y$ tako, da ohranimo alternacijo predznaka razlike $r_k = f - p_k^*$), $E_{k+1} := E_k \backslash \{x_j\} \cup \{y\}$.
     - 2.5 Povečamo $k$ za ena.
- Če se postopek konča, poznamo minimaks na $\varepsilon$ natančno.
- Naslednji izrek zagotavlja, da se postopek res konča.

### Izrek

*Naj bo $f \in C([a,b])$ in $(p_k^*)_{k\geq 0}$ zaporedje polinomov, ki jih generira opisani Remesov postopek. Naj bo $p^*$ polinom najboljše enakomerne aproksimacije za $f$ na $[a,b]$. Tedaj obstajata konstanti $c > 0$, $0 < \theta < 1$, da velja*

$$0 \leq \|f - p_k^*\|_\infty - M_n([a,b];f) \leq c\,\theta^k.$$

*Od tod sledi*

$$\|f - p_k^*\|_\infty \to \|f - p^*\|_\infty \quad in \quad \|p_k^* - p^*\|_\infty \to 0, \text{ ko } k \to \infty.$$

- Opisani postopek je v resnici prvi Remesov postopek. Obstaja tudi drugi Remesov postopek, pri katerem zamenjamo vse točke v $E_k$ tako, da ohranimo alternacijo predznaka.