Numerično reševanje navadnih diferencialnih enačb

Uvod

- Osnovni problem: Rešujemo začetni problem prvega reda
$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(a) = y_a.$$
ali krajše
$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_a.$$
- Eksistenčni izrek o rešitvi začetnega problema zagotavlja, da teoretično rešitev (vsaj lokalno) vedno obstaja, če funkcija f zadošča določenim pogojem (če je recimo Lipschitzova na drugo spremenljivko).
- Numerično rešiti zgornji problem seveda ne pomeni poiskati analitičnega predpisa za y.

- Numerično začetni problem rešujemo takole:
  - Na intervalu $[a, b]$, kjer iščemo rešitev, izberemo nekaj delilnih točk (privzeli bomo, da so ekvidistantne)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} = x_N = b, \quad h := x_{i+1} - x_i,$$

    za $i = 0, 1, \ldots, N-1$.
  - Iščemo numerične približke y_i za $y(x_i)$, torej $y_i \approx y(x_i)$.
  - Približke y_i generiramo zaporedoma z eksplicitno metodo (nov približek izračunamo neposredno iz prejšnjih) ali z implicitno metodo (nov približek dobimo posredno z reševanjem (nelinearne) enačbe.
  - Eksplicitna ali implicitna metoda je lahko enokoračna (nov približek y_{n+1} dobimo iz prejšnjega y_n), ali večkoračna, nov približek y_{n+1} dobimo iz nekaj prejšnjih, $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}$.

Lokalna in globalna napaka

- Lokalna napaka metode je razlika med $y_{n+1} - z(x_{n+1})$, kjer je z rešitev robnega problema $z' = f(x, z)$, $z(x_n) = y(x_n)$.
- Globalna napaka je vsota globalne napake na prejšnjem koraku in lokalne napake na zadnjem koraku.
- Lokalna napaka je reda $p \in \mathbb{N}$, če je

$$y_{n+1} - z(x_{n+1}) = C\, h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}),$$

kjer je C konstanta, neodvisna od h.

Enokoračne eksplicitne metode

- Eulerjeva metoda (1. reda):

$$y_{n+1} = y_n + h\,f(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

- Metoda Runge-Kutta četrtega reda

$$\begin{aligned}
k_1 &= h\,f(x_n, y_n), \\
k_2 &= h\,f(x_n + h/2, y_n + k_1/2), \\
k_3 &= h\,f(x_n + h/2, y_n + k_2/2), \\
k_4 &= h\,f(x_n + h, y_n + k_3), \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4)\,, \quad n = 0, 1, \ldots
\end{aligned}$$

- Obstaja cel razred metod Runge-Kutta različnih redov.

Eksplicitne večkoračne metode

- Najbolj znane večkoračne eksplicitne metode so Adams-Bashforthove metode.
- Dobimo jih s pomočjo interpolacijskega polinoma za funkcijo $f(x, y(x))$.
- Nova vrednost y_{n+1} k-koračne metode je odvisna od prejšnjih vrednosti $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k+1}$.
- Primer dvokoračne Adams-Bashforthove metode je

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})\right), \quad n = 0, 1, \ldots$$

- Začetne vrednosti $y_{n-k+1}, y_{n-k+2}, \ldots, y_n$ določimo z neko eksplicitno enokoračno metodo istega reda.

Enokoračne implicitne metode

- Splošna oblika implicitne enokoračne metode je

$$y_{n+1} = \Phi(h, x_n, y_n, y_{n+1}, f).$$

- Neznana količina nastopa torej v enačbi implicitno (pogosto nelinearno).
- Za izračun novega približka moramo torej rešiti (nelinearno) enačbo.
- Najpogosteje uporabimo kar navadno iteracijo oblike

$$y_{n+1} = \widetilde{\Phi}(y_{n+1}),$$

za začeti približek pa vzamemo približek za y_{n+1} po neki eksplicitni metodi.

- Trapezna metoda (drugega reda):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right), \quad n = 0, 1, \ldots$$

- Navadna iteracija za

$$y_{n+1} = \widetilde{\Phi}(y_{n+1}),$$

je konvergentna, če je

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}(h, x_n, y_n, y, f)\right| \leq 1, \quad y \approx y_{n+1}.$$

- Zgornji pogoj ponavadi lahko vedno izpolnimo za dovolj majhen h.

Reševanje sistemov diferencialnih enačb prvega reda

- Rešujemo sistem

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_d), \\
y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_d), \\
&\vdots \\
y_d' &= f_d(x, y_1, y_2, \ldots, y_d),
\end{aligned}
$$

  pri pogojih $y_1(a) = y_{1a}, \ldots, y_d(a) = y_{da}$.
- Uporabimo lahko katerokoli metodo za reševanje enačbe prvega reda, prirejeno za sistem.

- Uvedemo notacijo $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_d)^T$, $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_d)^T$ in problem prepišemo v obliko

$$\mathbf{Y}' = F(x, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y}(a) = \mathbf{Y}_a.$$

- Eulerjeva metoda za sistem se tako denimo glasi

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + h\,\mathbf{F}(x_n, \mathbf{Y}_n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Primer

Z Eulerjevo metodo rešite sistem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -y_1, \end{aligned}$$

kjer je $y_1(0) = 0$ *in* $y_2(0) = 1$. *Rešitev poiščite denimo na* $[0, 2\pi]$.

Reševanje diferencialne enačbe višjega reda

- Rešujemo enačbo

$$y^{(k)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(k-1)}),$$

pri pogojih $y(a) = y_a, y'(a) = y'_a, \dots, y^{(k-1)}(a) = y_a^{(k-1)}$.

- Uvedemo nove spremenljivke $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_k = y^{(k-1)}$ in problem prevedemo na reševanje sistema difefrencialnih enačb prvega reda

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_{k-1}' &= y_k, \\ y_k' &= f(x, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k), \end{aligned}$$

pri pogojih $y_1(a) = y_a, y_2(a) = y'_a, \dots, y_k(a) = y_a^{(k-1)}$.

Primer

Poiščite numerično rešitev začetnega problema drugega reda

$$y'' = -y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

na intervalu $[0, 2\,\pi]$.

Primer

Poiščite numerično rešitev začetnega problema drugega reda

$$y'' = t\ y, \quad y(0) = 0.3550, \quad y'(0) = -0.2588,$$

na intervalu $[0, 3]$ *in na intervalu* $[-10, 0]$.