Polinomska in racionalna interpolacija

Uvod

- Osnovni problem interpolacije: dane so vrednosti f_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, v paroma različnih točkah x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Iščemo polinom p najnižje možne stopnje, za katerega velja

$$p(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

- Polinom p se imenuje interpolacijski polinom. Točkam x_i rečemo interpolacijske abscise, vrednostim f_i pa interpolacijske ordinate. Na kratko rečemo, da p interpolira točke (x_i, f_i).

Primer

Na kolesarsko turo se pogosto pripravimo tako, da si ogledamo nekaj karakterističnih nadmorskih višin na poti. Teh je seveda samo nekaj, mi pa želimo zvezni potek nadmorske višine. Dobimo ga lahko denimo ravno s polinomsko interpolacijo.

- Osnovno vprašanje je, kdaj omenjeni interpolacijski polinom obstaja?
- Odgovor nanj je preprost: takrat, ko so interpolacijske abscise med seboj paroma različne.

Lema

Za interpolacijske točke (x_i, f_i), $i = 0, 1, \ldots, n$, *kjer so* x_i *paroma različne, obstaja natanko en interpolacijski polinom* p_n *stopnje* $\leq n$.

- Interpolacijski polinom pogosto uporabimo za izračun vrednosti pri $x \neq x_i, i = 0, 1, \ldots n$.
- Namesto interpolacijskega polinoma lahko iščemo kakšno drugo "preprosto" funkcijo, ki zadošča interpolacijskim pogojem.
- Če je n velik, potem interpolacijski polinom ni primeren.
- Alternativa je, da podatke razdelimo v gruče, konstruiramo interpolacijske polinome na majhnem številu podatkov in jih "zlepimo" v zlepke.
- Dandanes so zlepki osnova za večino vizualizacij, animacij, načrtovanje,...

Klasična oblika

- Interpolacijski polinom zapišemo v klasični obliki

$$p_n(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0.$$

- Dobimo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned}
a_n\, x_0^n + a_{n-1}\, x_0^{n-1} + \cdots + a_1\, x_0 + a_0 &= f_0 \\
a_n\, x_1^n + a_{n-1}\, x_1^{n-1} + \cdots + a_1\, x_1 + a_0 &= f_1 \\
&\vdots \\
a_n\, x_n^n + a_{n-1}\, x_n^{n-1} + \cdots + a_1\, x_n + a_0 &= f_n.
\end{aligned}$$

- V matrični obliki torej

$$V\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}.$$

- Pri tem je $\boldsymbol{a} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)^\top$, $\boldsymbol{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_n)^\top$ in

$$V = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots x_n & 1 \end{bmatrix}.$$

- Ker je

$$\det V = \prod_{i<j} (x_i - x_j),$$

ima sistem enolično rešitev.

- Računanje na tak način je prezahtevno in slabo pogojeno. Če je denimo $x_i = i/n, i = 0, 1, \ldots, n$, je za $n = 5$ pogojenostno število matrike V enako 4.9×10^3, pri $n = 20$ pa že kar 9.7×10^{16}.
- Interpolacijski polinom znamo izračunati bolj ekonomično in natančneje.
- Ogledali si bomo dve obliki, ki to omogočata.

Lagrangeova oblika

- Če namesto baze potenc za polinom izberemo ustreznejšo bazo, lahko interpolacijski polinom kar konstruiramo.
- Naj bo

$$\ell_{n,i}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

- Potem je

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \, \ell_{n,j}(x)$$

  interpolacijski polinom stopnje $\leq n$ za podatke (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$.

- Naj bo $\omega(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$. Potem na kratko pišemo

$$\ell_{n,i}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}.$$

Izrek

Če je f $(n+1)$-krat zvezno odvedljiva funkcija na intervalu $[a, b]$, ki vsebuje vse paroma različne točke x_0, x_1,...,x_n, potem za vsak $x \in [a, b]$ obstaja tako število $\xi \in (a, b)$, da je

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x).$$

- Tudi Lagrangeova oblika ni najboljša za konstrukcijo (veliko operacij in vnaprejšnje poznavanje stopnje polinoma).

Newtonova oblika

Definicija

Deljena diferenca $[x_0, x_1, \ldots, x_k]f$ *je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje* k*, ki se ujema s funkcijo* f *v* $x_0, x_1 \ldots, x_k$.

Nekaj lastnosti, ki veljajo za deljene diference:

1. $[x_0]f = f(x_0)$.
2. Je simetrična funkcija svojih argumentov.
3. Zadoščajo rekurzijski formuli

$$[x_0, x_1, \ldots, x_k]f = \frac{[x_1, x_2, \ldots, x_k]f - [x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}.$$

Izrek

Polinom

$$\begin{aligned} p_n(x) &= [x_0]f + (x - x_0)[x_0, x_1]f + \cdots \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})[x_0, x_1, \ldots, x_n]f \end{aligned}$$

je interpolacijski polinom za točke $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

- Polinom iz prejšnjega izreka se imenuje Newtonov interpolacijski polinom.
- Njegovor vrednost izračunamo v času $\mathcal{O}(n^2)$.

- Kaj se zgodi, ko gresta dve ali več točk v deljeni diferenci druga proti drugi?
- Izkaže se, da posplošeno deljeno diferenco lahko definiramo takole:

$$[x_0, \dots, x_k]f = \begin{cases} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & x_0 = \cdots = x_k, \\ \dfrac{[x_1, \dots, x_k]f - [x_0, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}, & \text{sicer.} \end{cases}$$

- Če se točke v deljeni diferenci ponovijo, pomeni, da bo polinom poleg vrednosti interpoliral še prve, druge,…odvode.

Primer

Zapišimo interpolacijski polinom p*, za katerega je* $p(0) = 1$, $p'(0) = 2$, $p''(0) = 3$, $p(1) = -1$, $p'(1) = 3$ *in* $p(2) = 4$*. Tabela deljenih diferenc je*

x_i	$[\cdot]f$	$[\cdot,\cdot]f$	$[\cdot,\cdot,\cdot]f$	$[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]f$	$[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]f$	$[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]f$
0	1					
		2				
0	1		$\frac{3}{2}$			
		2		$-\frac{11}{2}$		
0	1		-4		$\frac{29}{2}$	
		-2		9		$-\frac{79}{8}$
1	-1		5		$-\frac{21}{4}$	
		3		$-\frac{3}{2}$		
1	-1		2			
		5				
2	4					

polinom pa $p(x) = 1 + 2\,x + \frac{3}{2}\,x^2 - \frac{11}{2}\,x^3 + \frac{29}{2}\,x^3(x-1) - \frac{79}{8}\,x^3(x-1)^2$.

- Sedaj lahko zapišemo izrek za napako interpolacijskega polinoma tudi v primeru, ko točke x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, niso paroma različne.

Izrek

Naj bo f $(n+1)$-krat zvezno odvedljiva funkcija in p_n interpolacijski polinom na točkah x_i, $i = 0, 1, \ldots n$ (če se točke ponavljajo, polinom interpolira ustrezne višje odvode). Potem je

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x),$$

kjer je $\min\{x, x_0, \ldots, x_n\} \leq \xi \leq \max\{x, x_0, \ldots, x_n\}$.

Primer

Izračunajmo kvadratni interpolacijski polinom, ki interpolira funkcijsko vrednost funkcije $f(x) = \sin x$ *v točkah* $x_0 = 0$ *in* $x_1 = \pi/2$ *ter njen odvod v* $x_0 = 0$*. Nato čim bolje ocenimo napako pri interpolaciji.*
S tabelo deljenih diferenc izračunamo interpolacijsko parabolo

$$p_2(x) = x + \frac{4 - 2\pi}{\pi^2} x^2.$$

Napako ocenimo s pomočjo prejšnjega izreka. Očitno je $\left| f^{(3)}(x) \right| \le 1$*, faktor* $\omega(x) = x^2 (x - \pi/2)$ *pa ocenimo s pomočjo odvoda. Dobimo*

$$|\omega(x)| \le \max_{x \in [0,\pi/2]} x^2 (\pi/2 - x) = \frac{\pi^3}{54}.$$

Torej je

$$|f(x) - p_2(x)| \le \frac{1}{3!} \frac{\pi^3}{54} = 0.095698.$$

Divergenca polinomske interpolacije

- Pričakovali bi, da se napaka polinomske interpolacije manjša, če gostimo interpolacijske abscise. Vendar to v splošnem ni res.

Primer

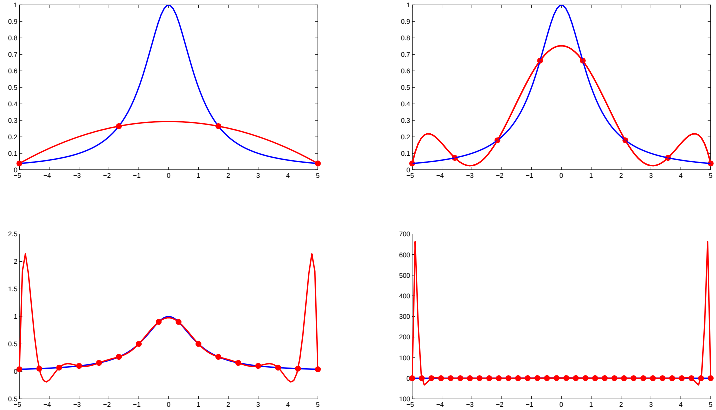
Vzemimo funkcijo $f(x) = 1/(1+x^2)$, $-5 \leq x \leq 5$ *in jo interpolirajmo pri abscisah*

$$x_i = -5 + i\frac{10}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Naj bo p_n *interpolacijski polinom na teh abscisah. Potem je*

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - p_n(x)| = \begin{cases} 0; & |x| < 3.633..., \\ \infty; & |x| > 3.633.... \end{cases}$$

Nekaj primerov interpolacijskih polinomov je na sliki 1.



Slika: Lagrangeovi interpolacijski polinomi (rdeče) za funkcijo f (modro) na 4, 8, 16 in 32 točkah.

Racionalna interpolacija

- Interpolacijska funkcija je oblike

$$r(x) = \frac{p_j(x)}{q_k(x)},$$

  kjer sta p_j in q_k polinoma stopnje j oziroma k.
- Polinoma p_j in q_k imata skupaj $j + k + 2$ koeficientov.
- Z deljenjem števca in imenovalca v ulomku p_j/q_k z vodilnim koeficientom polinoma p_j dosežemo, da ima p_j vodilni koeficient enak 1.
- Skupaj imamo torej $j + k + 1$ prostih koeficientov, zato mora biti $n = j + k$.

- Če interpoliramo točke (x_i, y_i), $i = 0, 1, \dots, n$, moramo rešiti sistem linearnih enačb

$$p_j(x_i) - q_k(x_i)\, y_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

- V splošem ni tako preprostih pogojev za rešljivost, kot v polinomskem primeru.
- Izbiramo lahko različne kombinacije stopenj j in k (upoštevati moramo le $n = j + k$.)
- Splošna hevristika glede izbire stopenj: stopnji j in k naj bosta čim nižji, po možnosti enaki, ali pa stopnja j večja od k.
- Za $n = 2\,\ell$ torej dobimo $j = k = \ell$, za $n = 2\,\ell + 1$ pa $j = k + 1 = \ell + 1$.