**Matrične igre**

***Matrična igra*** je igra za dva igralca, pri kateri ima prvi igralec *n* izbir (1, 2, .., *n*), drugi igralec pa *m* izbir (1, 2, .., *m*). Hkrati si izbereta vsak svojo potezo, izid igre pa določa ***plačilna matrika*** *A*, ki je realna matrika velikosti *n* x *m*, in sicer takole: Če prvi igralec izbere izbiro *i*, drugi pa *j*, mora drugi prvemu plačati *aij* denarnih enot (če je *aij* < 0, v resnici prvi igralec drugemu plača |*aij*| denarnih enot). Kot zgled smo si ogledali

* ***igro kamen, papir, škarje***, kjer je *n*=*m*=3 in
* ***igro*** podano s plačilno matriko *A*={{10,10,1,10},{2,5,2,2}}, kjer je *n*=2 in *m*=4.

Definirali smo števili *M*1 = max*i* min*j* *aij* (največji vrstični minimum) in *M*2 = min*j* max*i* *aij* (najmanjši stolpčni maksimum). Prvi igralec lahko vselej dobi vsaj *M*1 (če izbere izbiro, ki ustreza vrstici z največjim minimumom), drugi igralec pa lahko vselej prepreči, da bi izgubil več kot *M*2 (če izbere izbiro, ki ustreza stolpcu z najmanjšim maksimumom). Pokazali smo, da je za vsako matriko *M*1 <= *M*2. Pri igri KPŠ je npr. *M*1 = -1 in *M*2 = 1.

Definirali smo *sedlo matrike*,to je element, ki je najmanjši v svoji vrstici in največji v svojem stolpcu. Matrika ima sedlo natanko tedaj, ko je *M*1 = *M*2. Matrika igre KPŠ torej nima sedla.

Če ima plačilna matrika igre sedlo, ki se nahaja v vrstici *i*0 in stolpcu *j*0, je pri upoštevanju načela najmanjšega tveganja za prvega igralca optimalna izbira *i*0, za drugega igralca pa *j*0.

V splošnem plačilna matrika igre nima sedla. Kako igrati v takem primeru?

V splošnem plačilna matrika igre nima sedla. Kako igrati v takem primeru? Privzeli smo, da igralca igro velikokrat ponovita, in definirali pojem ***strategije*** igralca. To je verjetnostna porazdelitev na množici vseh njegovih izbir. Pokazali smo, da je matematično upanje dobitka prvega igralca pri velikem številu ponovitev igre pod pogojem, da prvi igralec uporablja strategijo *x*, drugi pa *y*, enako *E(x,y) = xTAy*. Prvi igralec lahko v povprečju s pametno igro vedno dobi vsaj max*x* min*y* *E(x,y),* drugi igralec pa s pametno igro v povprečju nikoli ne izgubi več kot min*y* max*x* *E(x,y).* Velja max*x* min*y* *E(x,y)* <= min*y* max*x* *E(x,y).*

Ugotovili smo, da jemin*y* *E(x,y) =* min*j* *E(x,y(j))*, kar pomeni, da se proti znani strategiji nasprotnika lahko 2. igralec optimalno brani že samo s čistimi strategijami.

To nam je omogočilo, da smo optimizacijskemu problemu 1. igralca smo priredili ***linearni program*** *P1* z *n*+1 neznankami(od katerih jih *n* ima pogoj nenegativnosti, ena pa ne) in *m*+1 pogoji (med katerimi je *m* neenačb in ena enačba). Prav tako smo ugotovili, da jemax*x* *E(x,y) =* max*i* *E(x(i),y)*, kar pomeni, da se proti znani strategiji nasprotnika lahko 1. igralec optimalno brani že samo s čistimi strategijami. To nam je omogočilo, da smo optimizacijskemu problemu 2. igralca smo priredili ***linearni program*** *P2* z *m*+1 neznankami(od katerih jih *m* ima pogoj nenegativnosti, ena pa ne) in *n*+1 pogoji (med katerimi je *n* neenačb in ena enačba).

Opazili smo, da sta si programa P1 in P2 dualna, zato velja

***Izrek o minimaksu***:*Za vsako matrično igro je* max*x* min*y* *E(x,y)* = min*y* max*x* *E(x,y).*Število *v =* max*x* min*y* *E(x,y)* = min*y* max*x* *E(x,y)*imenujemo***vrednost******matrične igre***.Če 1. igralec uporablja optimalno strategijo, v povprečju pri velikem številu ponovitev igre dobi vsaj *v* denarnih enot na igro. Analogno velja za 2. igralca: Če uporablja optimalno strategijo, v povprečju pri velikem številu ponovitev igre ne izgubi več kot *v* denarnih enot na igro. Igra je ***poštena***, če je njena vrednost enaka 0.

Za igro  Blotto smo preverili, ali sta dani strategiji optimalni.

Pokazali smo, da je vrednost igre s  sedlom *aij*, kar *aij*, *x*(*i*) je optimalna strategija 1. igralca, *y*(*j*) pa je optimalna strategija 2. igralca.

Ogledali smo si še ***simetrične igre***, pri katerih je plačilna matrika antisimetrična, torej *AT = -A*. Vrednost simetrične igre je enaka 0, množici optimalnih strategij 1. in 2. igralca pa se ujemata. Primer simetrične igre je *kamen, papir, škarje*.

Včasih lahko z uporabo ***dominacije*** zmanjšamo število smiselnih izbir in s tem tudi velikost plačilne matrike.

Za konec smo si ogledali še igro s kovancem, in razmislili, kako igro "popraviti", da bi postala poštena.