Matrične igre

Matrična igra je igra za dva igralca, pri kateri ima prvi igralec n izbir (1, 2, .., n), drugi igralec pa m izbir (1, 2, .., m). Hkrati si izbereta vsak svojo potezo, izid igre pa določa ***plačilna matrika*** A, ki je realna matrika velikosti n x m, in sicer takole: Če prvi igralec izbere izbiro i, drugi pa j, mora drugi prvemu plačati a_{ij} denarnih enot (če je $a_{ij} < 0$, v resnici prvi igralec drugemu plača $|a_{ij}|$ denarnih enot). Kot zgled smo si ogledali

- ***igro kamen, papir, škarje***, kjer je n=m=3 in
- ***igro*** podano s plačilno matriko A={{10,10,1,10},{2,5,2,2}}, kjer je n=2 in m=4.

Definirali smo števili $M_1 = \max_i \min_j a_{ij}$ (največji vrstični minimum) in $M_2 = \min_j \max_i a_{ij}$ (najmanjši stolpčni maksimum). Prvi igralec lahko vselej dobi vsaj M_1 (če izbere izbiro, ki ustreza vrstici z največjim minimumom), drugi igralec pa lahko vselej prepreči, da bi izgubil več kot M_2 (če izbere izbiro, ki ustreza stolpcu z najmanjšim maksimumom). Pokazali smo, da je za vsako matriko $M_1 <= M_2$. Pri igri KPŠ je npr. $M_1 = -1$ in $M_2 = 1$.

Definirali smo *sedlo matrike*, to je element, ki je najmanjši v svoji vrstici in največji v svojem stolpcu. Matrika ima sedlo natanko tedaj, ko je $M_1 = M_2$. Matrika igre KPŠ torej nima sedla.

Če ima plačilna matrika igre sedlo, ki se nahaja v vrstici i_0 in stolpcu j_0, je pri upoštevanju načela najmanjšega tveganja za prvega igralca optimalna izbira i_0, za drugega igralca pa j_0.

V splošnem plačilna matrika igre nima sedla. Kako igrati v takem primeru?

V splošnem plačilna matrika igre nima sedla. Kako igrati v takem primeru? Privzeli smo, da igralca igro velikokrat ponovita, in definirali pojem ***strategije*** igralca. To je verjetnostna porazdelitev na množici vseh njegovih izbir. Pokazali smo, da je matematično upanje dobitka prvega igralca pri velikem številu ponovitev igre pod pogojem, da prvi igralec uporablja strategijo x, drugi pa y, enako $E(x,y) = x^TAy$. Prvi igralec lahko v povprečju s pametno igro vedno dobi vsaj $\max_x \min_y E(x,y)$, drugi igralec pa s pametno igro v povprečju nikoli ne izgubi več kot $\min_y \max_x E(x,y)$. Velja $\max_x \min_y E(x,y) <= \min_y \max_x E(x,y)$.

Ugotovili smo, da je $\min_y E(x,y) = \min_j E(x,y^{(j)})$, kar pomeni, da se proti znani strategiji nasprotnika lahko 2. igralec optimalno brani že samo s čistimi strategijami.

To nam je omogočilo, da smo optimizacijskemu problemu 1. igralca smo priredili ***linearni program*** *P1* z n+1 neznankami (od katerih jih n ima pogoj nenegativnosti, ena pa ne) in m+1 pogoji (med katerimi je m neenačb in ena enačba).

Prav tako smo ugotovili, da je $\max_x E(x,y) = \max_i E(x^{(i)},y)$, kar pomeni, da se proti znani strategiji nasprotnika lahko 1. igralec optimalno brani že samo s čistimi strategijami. To nam je omogočilo, da smo optimizacijskemu problemu 2. igralca smo priredili ***linearni program*** *P2* z m+1 neznankami (od katerih jih m ima pogoj nenegativnosti, ena pa ne) in n+1 pogoji (med katerimi je n neenačb in ena enačba).

Opazili smo, da sta si programa P_1 in P_2 dualna, zato velja

Izrek o minimaksu: *Za vsako matrično igro je* $\max_x \min_y E(x,y) = \min_y \max_x E(x,y)$.

Število

$v = \max_x \min_y E(x,y) = \min_y \max_x E(x,y)$

imenujemo ***vrednost matrične igre***.Če 1. igralec uporablja optimalno strategijo, v povprečju pri velikem številu ponovitev igre dobi vsaj v denarnih enot na igro. Analogno velja za 2. igralca: Če uporablja optimalno strategijo, v povprečju pri velikem številu ponovitev igre ne izgubi več kot v denarnih enot na igro. Igra je ***poštena***, če je njena vrednost enaka 0.

Za igro Blotto smo preverili, ali sta dani strategiji optimalni.

Pokazali smo, da je vrednost igre s sedlom a_{ij}, kar a_{ij}, $x^{(i)}$ je optimalna strategija 1. igralca, $y^{(j)}$ pa je optimalna strategija 2. igralca.

Ogledali smo si še ***simetrične igre***, pri katerih je plačilna matrika antisimetrična, torej $A^T = -A$. Vrednost simetrične igre je enaka 0, množici optimalnih strategij 1. in 2. igralca pa se ujemata. Primer simetrične igre je *kamen, papir, škarje*.

Včasih lahko z uporabo ***dominacije*** zmanjšamo število smiselnih izbir in s tem tudi velikost plačilne matrike.

Za konec smo si ogledali še igro s kovancem, in razmislili, kako igro "popraviti", da bi postala poštena.