Največji pretoki

Definirali smo ***pretoke*** v usmerjenem grafu $G = (V,E)$ z izvorom s in ponorom t ter prepustnostmi povezav $c_{ij} > 0$. Nadalje smo definirali ***prerez*** *omrežja* (A, B), *prepustnost prereza* $c(A, B)$ in *tok skozi prerez* $f(A, B)$. ***Velikost pretoka*** $|f|$ smo definirali kot tok skozi prerez $(\{s\}, V - \{s\})$.

Pokazali smo, da je pretok skozi vse prereze enak, in da za vsak pretok f in vsak prerez (A, B) velja: $f(A,B) <= c(A,B)$; če velja enačaj, pa je f največji pretok in (A,B) najmanjši prerez.

Definirali smo ***residualno omrežje*** glede na pretok f. Vsako usmerjeno pot od s do t v residualnem omrežju imenujemo ***nezasičena pot***.

Dokazali smo ***izrek Forda in Fulkersona***, ki pravi, da je pretok f v omrežju G največji natanko tedaj, ko obstaja prerez (A,B), za katerega velja:

$f(A,B) = c(A,B)$,

to pa je res natanko tedaj, ko v omrežju G ni nobene nezasičene poti za f.

Opisali smo **algoritem Forda in Fulkersona** (algoritem FF) za iskanje največjega pretoka.

Pokazali smo, da za problem največjega pretoka velja ***izrek o celih rešitvah***: *Če so prepustnosti vseh povezav cela števila, obstaja največji pretok, ki ima na vseh povezavah celoštevilske vrednosti*.

Ugotovili smo, da je pri celoštevilskih podatkih število korakov algoritma FF navzgor omejeno z velikostjo največjega pretoka. Na primeru omrežja na 4 vozliščih s 5 povezavami, smo preverili, da je ta zgornja meja dosežena. Ker lahko z ustrezno izbiro prepustnosti v tem omrežju dosežemo poljubno velik pretok, je tudi število korakov algoritma FF na tem omrežju lahko poljubno veliko.

Ta problem pri izboljšanih različicah algoritma FF rešimo tako, da za povečevanje pretoka uporabljamo le *najkrajše* nezasičene poti.

Definicija. Kvadratna realna matrika je ***dvojno stohastična***, če so njeni elementi nenegativni, vse vrstične in stolpčne vsote pa so enake 1.

Kot zgled uporabe izreka o celih rešitvah smo dokazali trditev:

Za vsako dvojno stohastično matriko A obstaja permutacijska matrika P, tako da za vse i, j velja: $p_{ij} = 1 \Longrightarrow a_{ij} > 0$.

S pomočjo te trditve smo dokazali še ***Koenigov izrek o plesnih parih***.