**Prirejanja in pokritja**

Oznaka: če je A končna množica, z |A| označimo število njenih elementov.

*Definicija*. Množica *M* povezav grafa *G* je *prirejanje* v *G*, če povezave iz *M* nimajo skupnih krajišč. Prirejanje *M* je *popolno*, če je vsako vozlišče grafa *G* krajišče vsaj ene povezave iz *M*. Prirejanje je *največje*, če ima največ povezav med vsemi prirejanji grafa *G*.

Koenigov izrek o plesnih parih se v jeziku teorije grafov glasi:

***Izrek.*** Vsak regularen dvodelen graf ima popolno prirejanje.

*Definicija*. Množica *P* vozlišč grafa *G* je *pokritje* v *G*, če ima vsaka povezava grafa *G* vsaj eno krajišče v *P*.

Moč največjega prirejanja v *G* smo označili z *mi(G), moč* najmanšega pokritja v *G* pa s *tau(G)*. Pokazali smo:

*1. Če je M prirejanje in P pokritje v G, je |M| <= |P|.
2. Za vsak graf G je mi(G) <= tau(G).
3. Če za neko prirejanje M in neko pokritje P velja |M| = |P|, je M največje prirejanje in P najmanjše pokritje v G.*

Glede na izbrano prirejanje *M* smo definirali *proste* in *vezane povezave*, *prosta* in *vezana vozlišča*, *izmenične poti* in *povečujoče poti*.

Dokazali smo ***Bergeov izrek***, ki pravi: *Prirejanje M je največje natanko tedaj, ko graf ne vsebuje nobenih povečujočih poti za M*.

Ta izrek nam omogoča poiskati največje prirejanje z naslednjim postopkom:

1. *M* = poljubno prirejanje v *G*
2. **dokler** v *G* obstaja povečujoča pot *P* **ponavljaj**
......... povečaj prirejanje *M* z zamenjavo prostih in vezanih povezav na *P*.

Preostane nam problem, kako učinkovito iskati povečujoče poti v grafu *G*. Odslej se omejimo na ***dvodelne grafe***.

*Opisali smo* ***madžarsko metodo (MM)*** *za iskanje največjega prirejanja v dvodelnem grafu G. Poleg največjega prirejanja v G nam ta metoda poišče tudi najmanjše pokritje v G.*

Z uporabo MM smo dokazali ***Koenig-Egervaryjev izrek***, ki pravi: *V vsakem dvodelnem grafu je moč največjega prirejanja enaka moči najmanjšega pokritja*, in ***Hallov izrek***, ki pravi: *V dvodelnem grafu G = (X U Y, E) obstaja prirejanje, ki veže vsa vozlišča iz X, natanko tedaj, ko za vsako podmnožico U množice X velja: |N(U)| >= |U|*. Tu je *N(U)* *množica sosedov* množice *U*, torej množica vseh vozlišč grafa *G*, ki imajo kakšno sosedo v *množici U*.

## Madžarska metoda z utežmi (MMU)

Ogledali smo si **madžarsko metodo z utežmi (MMU)**za iskanje najcenejšega popolnega prirejanja v uteženem polnem dvodelnem grafu *Kn,n*. Ves čas delamo z *matriko cen povezav C*, ki je velikosti *n x n*.

Postopek:

*1. korak: Od elementov vsake vrstice matrike C odštejemo najmanjši element tiste vrstice. Od elementov vsakega stolpca matrike C odštejemo najmanjši element tistega stolpca.

2. korak: Če v matriki C najdemo n ničel, tako da je v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu natanko ena, končamo (najdene ničle določajo najcenejše popolno prirejanje v G).

Sicer poiščemo množico vrstic in stolpcev (skupaj manj kot n), ki pokrijejo vse ničle v matriki C.

3. korak: Naj bo eps najmanjši nepokriti element C. Vse nepokrite elemente zmanjšamo za eps. Vse dvakrat pokrite elemente povečamo za eps. Ostale elemente pustimo nespremenjene. Vrnemo se na korak 2.*

Pokazali smo, kako lahko izvedemo 2. korak MMU s pomočjo MM na dvodelnih grafih brez uteži. Utemeljili smo pravilnost MMU.

Problem najcenejšega popolnega prirejanja v polnem dvodelnem grafu z utežmi na povezavah pogosto srečamo v obliki problema ***prirejanja opravil***. Če želimo vsoto uteži maksimizirati namesto minimizirati, matriko *C* zamenjamo z matriko -*C*.