Prirejanja in pokritja

Oznaka: če je A končna množica, z |A| označimo število njenih elementov.

Definicija. Množica *M* povezav grafa *G* je *prirejanje* v *G*, če povezave iz *M* nimajo skupnih krajišč. Prirejanje *M* je *popolno*, če je vsako vozlišče grafa *G* krajišče vsaj ene povezave iz *M*. Prirejanje je *največje*, če ima največ povezav med vsemi prirejanji grafa *G*.

Koenigov izrek o plesnih parih se v jeziku teorije grafov glasi:

Izrek. Vsak regularen dvodelen graf ima popolno prirejanje.

Definicija. Množica *P* vozlišč grafa *G* je *pokritje* v *G*, če ima vsaka povezava grafa *G* vsaj eno krajišče v *P*.

Moč največjega prirejanja v *G* smo označili z *mi(G)*, *moč* najmanšega pokritja v *G* pa s *tau(G)*. Pokazali smo:

1. Če je M prirejanje in P pokritje v G, je |M| <= |P|.
2. Za vsak graf G je mi(G) <= tau(G).
3. Če za neko prirejanje M in neko pokritje P velja |M| = |P|, je M največje prirejanje in P najmanjše pokritje v G.

Glede na izbrano prirejanje *M* smo definirali *proste* in *vezane povezave*, *prosta* in *vezana vozlišča*, *izmenične poti* in *povečujoče poti*.

Dokazali smo ***Bergeov izrek***, ki pravi: *Prirejanje M je največje natanko tedaj, ko graf ne vsebuje nobenih povečujočih poti za M.*

Ta izrek nam omogoča poiskati največje prirejanje z naslednjim postopkom:

1. *M* = poljubno prirejanje v *G*
2. **dokler** v *G* obstaja povečujoča pot *P* **ponavljaj**
..... povečaj prirejanje *M* z zamenjavo prostih in vezanih povezav na *P*.

Preostane nam problem, kako učinkovito iskati povečujoče poti v grafu *G*. Odslej se omejimo na ***dvodelne grafe***.

*Opisali smo **madžarsko metodo (MM)** za iskanje največjega prirejanja v dvodelnem grafu G. Poleg največjega prirejanja v G nam ta metoda poišče tudi najmanjše pokritje v G.*

Z uporabo MM smo dokazali ***Koenig-Egervaryjev izrek***, ki pravi: *V vsakem dvodelnem grafu je moč največjega prirejanja enaka moči najmanjšega pokritja*, in ***Hallov izrek***, ki pravi: *V dvodelnem grafu G = (X U Y, E) obstaja prirejanje, ki veže vsa vozlišča iz X, natanko tedaj, ko za vsako podmnožico U množice X velja: |N(U)| >= |U|*. Tu je *N(U) množica sosedov* množice *U*, torej množica vseh vozlišč grafa *G*, ki imajo kakšno sosedo v *množici U*.

Madžarska metoda z utežmi (MMU)

Ogledali smo si **madžarsko metodo z utežmi (MMU)** za iskanje najcenejšega popolnega prirejanja v uteženem polnem dvodelnem grafu $K_{n,n}$. Ves čas delamo z *matriko cen povezav C*, ki je velikosti *n x n*.

Postopek:

1. korak: Od elementov vsake vrstice matrike C odštejemo najmanjši element tiste vrstice. Od elementov vsakega stolpca matrike C odštejemo najmanjši element tistega stolpca.

2. korak: Če v matriki C najdemo n ničel, tako da je v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu natanko ena, končamo (najdene ničle določajo najcenejše popolno prirejanje v G).

Sicer poiščemo množico vrstic in stolpcev (skupaj manj kot n), ki pokrijejo vse ničle v matriki C.

3. korak: Naj bo eps najmanjši nepokriti element C. Vse nepokrite elemente zmanjšamo za eps. Vse dvakrat pokrite elemente povečamo za eps. Ostale elemente pustimo nespremenjene. Vrnemo se na korak 2.

Pokazali smo, kako lahko izvedemo 2. korak MMU s pomočjo MM na dvodelnih grafih brez uteži. Utemeljili smo pravilnost MMU.

Problem najcenejšega popolnega prirejanja v polnem dvodelnem grafu z utežmi na povezavah pogosto srečamo v obliki problema ***prirejanja opravil***. Če želimo vsoto uteži maksimizirati namesto minimizirati, matriko *C* zamenjamo z matriko -*C*.