**Problem razvoza (PR)**

Dano je transportno omrežje, po katerem prevažamo določeno dobrino. V nekaterih krajih to dobrino izdelujejo oziroma pridobivajo, v drugih pa jo porabljajo. Predpostavljamo, da je skupna ponudba enaka skupnemu povpraševanju. Zanima nas, kako zadostiti povpraševanju z minimalnimi prevoznimi stroški.

Matematični model problema razvoza:

*Iščemo:* min *cTx*
*pri pogojih* *A x = b, x* >= 0

kjer je *A* incidenčna matrika nekega usmerjenega grafa *G*, *b* pa vektor z vsoto komponent enako 0. To je poseben primer LP, ki ga lahko rešujemo s ***simpleksno metodo na omrežjih***.

### Simpleksna metoda na omrežjih

*Definicija:* Dopustna rešitev *x* je ***drevesna dopustna rešitev*** ali ***ddr***, če v grafu *G* obstaja vpeto drevo *T*, tako da je razvoz *x* na povezavah zunaj drevesa *T* enak 0.

Denimo, da je *x* ddr, ki ustreza drevesu *T*. Izboljšati jo skušamo takole:

1. V vozliščih 1, 2, .., *m* določimo ***cene prevoza*** *y*1*, y*2*, .., ym* iz sistema enačb:

*y*1 = 0,
*yi* + *cij* = *yj*, za vse povezave *ij* drevesa *T*.

2. ***Vstopajočo povezavo*** *e* izberemo med tistimi povezavami *ij* zunaj drevesa *T*, za katere je *yi* + *cij* < *yj.*

3. Graf *T+e* vsebuje natanko en cikel *C*. Povezave cikla *C* delimo na *preme* (usmerjene enako kot *e*) in *obratne* (usmerjene nasprotno kot *e*). Naj bo

*t* = min {*xuv*; *uv* obratna povezava na *C*}.

4. ***Izstopajočo povezavo*** *f* izberemo med tistimi obratnimi povezavami *uv*, pri katerih je dosežen zgornji minimum.

5. Razvoz na premih povezavah povečamo za *t*, na obratnih pa zmanjšamo za *t*. Drevo *T* nadomestimo z drevesom *T+e-f*.

***Izrek****:* *Če za vse povezave ij grafa G velja neenačba yi + cij >= yj, je trenutna drevesna dopustna rešitev optimalna.*To pomeni: Če ne moremo izbrati *vstopajoče* povezave, smo končali - trenutna ddr je optimalna*.*

*Za popolno rešitev PR pa je treba razrešiti še nekaj težav.

1. Kaj če ne moremo izbrati izstopajoče povezave, ker na ciklu C v grafu T+e ni nobene obratne povezave? V tem primeru ima graf G usmerjen cikel z negativno vsoto prevoznih stroškov, torej je PR* ***neomejen****.

2. Kako preprečimo, da bi simpleksni postopek na omrežju zašel v neskončno zanko? To nam zagotavlja* ***Cunninghamovo pravilo****, ki pravi:

Eno od vozlišč grafa G izberemo za koren r. Naj bo T trenutno vpeto drevo in e vstopajoča povezava. Vozlišče na C, v katerem se združita poti po T od krajišč povezave e do korena, imenujemo spoj. Če je kandidatk za izstop več, izberemo prvo med njimi od spoja po C v smislu povezave e.* (na naslednjih predavanjih) *3. Kako poiščemo* ***začetno drevesno dopustno rešitev****? Tudi na omrežjih je odgovor dvofazna simpleksna metoda. Naj bo r koren grafa, izbran pri uporabi Cunninghamovega pravila (gl. prejšnji odstavek). V 1. fazi grafu G dodamo umetne povezave: za vsako vozlišče j z bj >= 0 dodamo povezavo rj (če je še ni); za vsako vozlišče j z bj < 0 dodamo povezavo jr (če je še ni). Na novem grafu rešimo pomožni PR, kjer stroške prevoza na povezavah definiramo takole:

dij = 1, če ij umetna povezava,
dij = 0, če ij prvotna povezava.

Za začetno drevesno dopustno rešitev pomožnega problema vzamemo tisto, ki ustreza zvezdi s središčem v vozlišču r. Pomožni problem je gotovo omejen, ker so vsi stroški dij >= 0. Rešimo ga s simpleksno metodo na omrežjih in dobimo rešitev x\*, ki ustreza drevesu T\*. Tu lahko nastopijo trije primeri:

a) T\* ne vsebuje umetnih povezav. V tem primeru T\* določa iskano* ***začetno ddr*** *prvotnega PR, ki ga v 2. fazi rešimo z običajno simpleksno metodo na omrežjih.

b) T\* vsebuje umetno povezavo ij, na kateri je xij\* > 0. V tem primeru je prvotni PR* ***nedopusten****.

c) T\* vsebuje umetne povezave, vendar je xij\* = 0 na vseh umetnih povezavah ij. V tem primeru graf G* ***razpade*** *na dva neprazna neodvisna podgrafa. Rešitev danega PR dobimo tako, da ga rešimo ločeno na vsakem od obeh podgrafov ločeno.

S tem je opis simpleksne metode na omrežjih končan.*

Naredili smo povzetek dvofazne simpleksne metode (glej prosojnice).

Dokazali smo, da za problem razvoza velja ***izrek o celih rešitvah***: Naj bo vektor povpraševanja *b* celoštevilski. Če ima problem razvoza dopustno rešitev, ima tudi celoštevilsko dopustno rešitev; in če ima optimalno rešitev, ima tudi celoštevilsko optimalno rešitev.

Na problem razvoza smo pogledali še z drugega zornega kota. Ugotovili smo, da je pri reševanju problema razvoza P ob koncu simpleksnega postopka na omrežju vektor cen *y* optimalna rešitev ***dualnega problema*** P', kjer iščemo max *bTy* pri pogojih *ATy <= c*.