Problem razvoza (PR)

Dano je transportno omrežje, po katerem prevažamo določeno dobrino. V nekaterih krajih to dobrino izdelujejo oziroma pridobivajo, v drugih pa jo porabljajo. Predpostavljamo, da je skupna ponudba enaka skupnemu povpraševanju. Zanima nas, kako zadostiti povpraševanju z minimalnimi prevoznimi stroški.

Matematični model problema razvoza:

Iščemo: min $c^T x$
pri pogojih $A\,x = b$, $x >= 0$

kjer je A incidenčna matrika nekega usmerjenega grafa G, b pa vektor z vsoto komponent enako 0. To je poseben primer LP, ki ga lahko rešujemo s ***simpleksno metodo na omrežjih***.

Simpleksna metoda na omrežjih

Definicija: Dopustna rešitev x je ***drevesna dopustna rešitev*** ali ***ddr***, če v grafu G obstaja vpeto drevo T, tako da je razvoz x na povezavah zunaj drevesa T enak 0.

Denimo, da je x ddr, ki ustreza drevesu T. Izboljšati jo skušamo takole:

1. V vozliščih 1, 2, .., m določimo ***cene prevoza*** $y_1, y_2, .., y_m$ iz sistema enačb:

$y_1 = 0$,
$y_i + c_{ij} = y_j$, za vse povezave ij drevesa T.

2. ***Vstopajočo povezavo*** e izberemo med tistimi povezavami ij zunaj drevesa T, za katere je $y_i + c_{ij} < y_j$.

3. Graf $T+e$ vsebuje natanko en cikel C. Povezave cikla C delimo na *preme* (usmerjene enako kot e) in *obratne* (usmerjene nasprotno kot e). Naj bo

$t = \min \{x_{uv};\ uv$ obratna povezava na $C\}$.

4. ***Izstopajočo povezavo*** f izberemo med tistimi obratnimi povezavami uv, pri katerih je dosežen zgornji minimum.

5. Razvoz na premih povezavah povečamo za t, na obratnih pa zmanjšamo za t. Drevo T nadomestimo z drevesom $T+e-f$.

Izrek*: Če za vse povezave ij grafa G velja neenačba* $y_i + c_{ij} >= y_j$, *je trenutna drevesna dopustna rešitev optimalna.*

To pomeni: Če ne moremo izbrati *vstopajoče* povezave, smo končali - trenutna ddr je optimalna.

Za popolno rešitev PR pa je treba razrešiti še nekaj težav.

1. Kaj če ne moremo izbrati izstopajoče povezave, ker na ciklu C v grafu T+e ni nobene obratne povezave? V tem primeru ima graf G usmerjen cikel z negativno vsoto prevoznih stroškov, torej je PR ***neomejen****.*

2. Kako preprečimo, da bi simpleksni postopek na omrežju zašel v neskončno zanko? To nam zagotavlja ***Cunninghamovo pravilo****, ki pravi:*

Eno od vozlišč grafa G izberemo za koren r. Naj bo T trenutno vpeto drevo in e vstopajoča povezava. Vozlišče na C, v katerem se združita poti po T od krajišč povezave e do korena, imenujemo spoj. Če je kandidatk za izstop več, izberemo prvo med njimi od spoja po C v smislu povezave e. (na naslednjih predavanjih)

3. Kako poiščemo ***začetno drevesno dopustno rešitev****? Tudi na omrežjih je odgovor dvofazna simpleksna metoda. Naj bo r koren grafa, izbran pri uporabi Cunninghamovega pravila (gl. prejšnji odstavek). V 1. fazi grafu G dodamo umetne povezave: za vsako vozlišče j z* $b_j >= 0$ *dodamo povezavo rj (če je še ni); za vsako vozlišče j z* $b_j < 0$ *dodamo povezavo jr (če je še ni). Na novem grafu rešimo pomožni PR, kjer stroške prevoza na povezavah definiramo takole:*

$d_{ij} = 1$*, če ij umetna povezava,*
$d_{ij} = 0$*, če ij prvotna povezava.*

Za začetno drevesno dopustno rešitev pomožnega problema vzamemo tisto, ki ustreza zvezdi s središčem v vozlišču r. Pomožni problem je gotovo omejen, ker so vsi stroški $d_{ij} >= 0$*. Rešimo ga s simpleksno metodo na omrežjih in dobimo rešitev x*, ki ustreza drevesu T*. Tu lahko nastopijo trije primeri:*

a) T ne vsebuje umetnih povezav. V tem primeru T* določa iskano* ***začetno ddr*** *prvotnega PR, ki ga v 2. fazi rešimo z običajno simpleksno metodo na omrežjih.*

b) T vsebuje umetno povezavo ij, na kateri je* $x_{ij}^* > 0$*. V tem primeru je prvotni PR* ***nedopusten****.*

c) T vsebuje umetne povezave, vendar je* $x_{ij}^* = 0$ *na vseh umetnih povezavah ij. V tem primeru graf G* ***razpade*** *na dva neprazna neodvisna podgrafa. Rešitev danega PR dobimo tako, da ga rešimo ločeno na vsakem od obeh podgrafov ločeno.*

S tem je opis simpleksne metode na omrežjih končan.

Naredili smo povzetek dvofazne simpleksne metode (glej prosojnice).

Dokazali smo, da za problem razvoza velja ***izrek o celih rešitvah***: Naj bo vektor povpraševanja *b* celoštevilski. Če ima problem razvoza dopustno rešitev, ima tudi celoštevilsko dopustno rešitev; in če ima optimalno rešitev, ima tudi celoštevilsko optimalno rešitev.

Na problem razvoza smo pogledali še z drugega zornega kota. Ugotovili smo, da je pri reševanju problema razvoza P ob koncu simpleksnega postopka na omrežju vektor cen y optimalna rešitev ***dualnega problema*** P', kjer iščemo max $b^T y$ pri pogojih $A^T y <= c$.