Prvi izpit - PDE(VSŠ)

1. Z metodo karakteristik poišči rešitev enačbe

$$u_x + \frac{x}{y} u_y = 0, \quad \text{p.p.} \;\; u(0,y) = e^{-y^2}, \; y > 0.$$

   Ali je rešitev enolična?

2. Podana je parcialna diferencialna enačba drugega reda

$$u_{xx} - 3u_{xy} = u_x - 3u_y.$$

Pretvori jo v kanonično obliko in poišči njeno splošno rešitev.

3. S separacijo spremenljivk poišči rešitev enačbe

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

4. Podan je funkcional

$$F(y)=\int_a^b L(x,y',y'')\mathrm{d}x,\qquad \text{p.p. } y(b)=A,\ y'(b)=B.$$

a) Pokaži, da je funkcija $y=y(x)$ njegova stacionarna točka natanko tedaj, ko sta izpolnjena pogoja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right)\quad \text{in}\quad \frac{\partial L}{\partial y''}\Big|_{x=a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y''}\Big|_{x=a}=0.$$

b) Poišči in klasificiraj stacionarno točko zgornjega funkcionala za $L(x,y',y'')=1+(y')^2+(y'')^2$, $a=0$, $b=1$ in $A=B=2$.

1. Kakšnega tipa je enačba $xu_x + (1+x)u_y = u^2$?
2. Reši enačbo $\triangle u = 2013$ in $u|_{S(0,23)} = 5$ na krogu $K(0,23)$. Ali izpolnjuje transverzalnostni pogoj pri začetnem pogoju $u(x,x) = x$?
3. Zapiši toplotno enačbo v eni krajevni spremenljivki in pripadajoče toplotno jedro. Z uporabe toplotnega jedra zapiši še rešitev enačbe pri pogoju $u(x,0) = f(x)$.
4. Zapiši osnovni problem variacijskega računa. Kaj so ekstremale? Kdaj ima osnovni problem variacijskega računa v ekstremali res minimum?