Prvi izpit - PDE(VSŠ)

1. Z metodo karakteristik poišči rešitev enačbe
$$u_x + \frac{x}{y} u_y = 0, \quad \text{p.p.} \;\; u(0,y) = e^{-y^2}, \; y > 0.$$
Ali je rešitev enolična?
Rešitev: Najprej poiščemo parametrična rešitev karakterističnega sistema
$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = \frac{x}{y}, \quad \dot{u} = 0$$
pri začetnem pogoju $\Gamma(s) = (0, s, e^{-s^2})$. Ta je enaka
$$x = t, \quad y = \sqrt{t^2 + s^2}, \quad u = e^{-s^2}.$$
Eksplicitno jo lahko zapišemo kot
$$u = e^{x^2 - y^2}.$$
Zanjo je izpolnjen transferzalnostni pogoj
$$(T) = \begin{bmatrix} a(x_0(s), y_0(s)) & a(x_0(s), y_0(s)) \\ \dot{x_0}(s) & \dot{y_0}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0.$$
Torej je to edina rešitev enačbe.

2. Podana je parcialna diferencialna enačba drugega reda
$$u_{xx} - 3u_{xy} = u_x - 3u_y.$$
Pretvori jo v kanonično obliko in poišči njeno splošno rešitev.
Rešitev: Ker je $\delta = 9 > 0$, je enačba hiperbolična. Za novi spremenljivki tako vzamemo funkciji, ki rešita enačbi
$$t_x - 3t_y = 0 \text{ in } s_x = 0.$$
To sta na primer $t = y + 3x$ in $s = y$. Z njima se enačba izrazi kot
$$u_{st} = \frac{1}{3} u_s.$$
Splošna rešitev je enaka
$$u_s = F(s) e^{\frac{1}{3}t}$$
$$u = F(s) e^{\frac{1}{3}t} + G(t)$$
$$u = F(y) e^{\frac{1}{3}(y+3x)} + G(y + 3x).$$

3. S separacijo spremenljivk poišči rešitev enačbe

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Rešitev: Prek nastavka $u = X(x)T(t)$ dobimo sistem

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = \mu \in \mathbb{R}, \ \ X(0) = X(\pi) = 0.$$

Izkaže se, da so lastni pari sistema za X enaki

$$\lambda_n = -n^2, \ \ X_n(x) = \sin(nx), \ \ n \in \mathbb{N}.$$

To porodi sistem za funkcije T

$$\frac{T''}{T} = -n^2 \Rightarrow T_n(t) = C_n \sin(nt) + D_n \cos(nt).$$

Nastavek za iskanje rešitve je torej

$$u(x,t) = \sum_{n=1} (C_n \sin(nt) + D_n \cos(nt)) \sin(nx).$$

Z upoštevanjem začetnih pogojev dobimo

$$u(x,0) = \sum_{n=1} D_n \sin(nx) = \sin x \Rightarrow D_1 = 1, \ D_n = 0 \text{ za } n \geq 2$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1} nC_n \sin(nx) = \sin x \Rightarrow C_1 = 1, \ C_n = 0 \text{ za } n \geq 2$$

Rešitev je torej $u = (\cos t + \sin t) \sin x$.

4. Podan je funkcional

$$F(y) = \int_a^b L(x, y', y'')\mathrm{d}x, \qquad \text{p.p. } \ y(b) = A, \ y'(b) = B.$$

a) Pokaži, da je funkcija $y = y(x)$ njegova stacionarna točka natanko tedaj, ko sta izpolnjena pogoja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right) \quad \text{in} \quad \frac{\partial L}{\partial y''}|_{x=a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y''}|_{x=a} = 0.$$

b) Poišči in klasificiraj stacionarno točko zgornjega funkcionala za $L(x, y', y'') = 1 + (y')^2 + (y'')^2$, $a = 0$, $b = 1$ in $A = B = 2$.

Rešitev: Za točko a) si oglej rešitev zadnje naloge v drugem kolokviju in upoštevaj, da sta fiksiran $y'(b)$ namesto $y(a)$.
Če upoštevamo izpeljano pravilo, dobimo enačbo

$$y'' = y'''' \text{ p.p. } y''(0) = y'''(0) = 0,\ y(1) = y'(1) = 2.$$

Njena splošna rešitev je

$$y = Ax + B + Ce^x + De^{-x},$$

kar pomeni, da je iskana funkcija $y = 2x$. Ker je $M_x = \mathbb{R}^2$ konveksna in H_L diagonalna matrika s številom 2 na diagonali (t.j. $\lambda_{1,2} = 2 > 0$, funkcija L je konveksna), imamo v tej točki minimum.