

Drugi izpit - PDE(VSŠ)

1. Z metodo karakteristik poišči rešitev enačbe

$$u_x + y^2 u_y = u^2, \quad \text{p.p. } u(x, 1) = \frac{1}{2+x} \text{ za } x, y > 0.$$

Ali je rešitev enolična?

2. Podana je parcialna diferencialna enačba drugega reda

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = u_x - u_y.$$

Pretvori jo v kanonično obliko in poišči njeno splošno rešitev.

3. S separacijo spremenljivk poišči rešitev enačbe

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

4. Podan je funkcional

$$F(y) = \int_a^b L(x, y, y') dx, \quad \text{p.p. } y(b) = A.$$

- a) Pokaži, da je funkcija $y = y(x)$ njegova stacionarna točka natanko tedaj, ko sta izpolnjena pogoja

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \quad \text{in} \quad \frac{\partial L}{\partial y'} \Big|_{x=a} = 0.$$

- b) Poišči in klasificiraj stacionarno točko zgornjega funkcionala za $L(x, y, y') = 1 + y^2 + (y')^2$, $a = 0$, $b = 1$ in $A = e^2 + 1$.

1. Reši enačbo $\Delta u = 2013$ in $u|_{S(0,1)} = 5$ na krogu $K(0, 1)$.
2. Kakšnega tipa je enačba $(x + 2)^2 u_x + (4x + x^2) u_y = u^2$? Ali izpolnjuje transverzalnostni pogoj pri začetnem pogoju $u(x, x) = x$?
3. Napiši valovno enačbo v eni spremenljivki. Zapiši še D'Alembertovo rešitev pri začetnih pogojih $u(x, 0) = f(x)$ in $u_t(x, 0) = g(x)$.
4. Zapiši osnovni problem variacijskega računa. Kaj so ekstremale? Kdaj ima osnovni problem variacijskega računa v ekstremali res minimum?