Drugi izpit - PDE(VSŠ)

1. Z metodo karakteristik poišči rešitev enačbe

$$u_x + y^2 u_y = u^2, \quad \text{p.p.} \;\; u(x,1) = \frac{1}{2+x} \text{ za } x, y > 0.$$

   Ali je rešitev enolična?

   Rešitev: Najprej poiščemo parametrična rešitev karakterističnega sistema

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = y^2, \quad \dot{u} = u^2$$

   pri začetnem pogoju $\Gamma(s) = (s, 1, \frac{1}{2+s})$. Ta je enaka

$$x = t + s, \quad y = \frac{1}{1-t}, \quad u = \frac{1}{2+s-t}.$$

   Eksplicitno jo lahko zapišemo kot

$$u = \frac{y}{xy+2}.$$

   Zanjo je izpolnjen transferzalnostni pogoj

$$(T) = \begin{bmatrix} a(x_0(s), y_0(s)) & a(x_0(s), y_0(s)) \\ \dot{x_0}(s) & \dot{y_0}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

   Torej je to edina rešitev enačbe.

2. Podana je parcialna diferencialna enačba drugega reda

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = u_x - u_y.$$

   Pretvori jo v kanonično obliko in poišči njeno splošno rešitev.

   Rešitev: Ker je $\delta = 0$, je enačba parabolična. Za prvo novo tako vzamemo funkcijo, ki reši enačbo $t_x - t_y = 0$. Na primer $t = x + y$. Za drugo spremenljivko vzamemo funkcijo, ki je neodvisna od t, na primer $s = x$. Z njima se enačba izrazi kot

$$u_{ss} = u_s.$$

   To je enačba drugega reda v s. Njena karakteristična enačba je $\lambda^2 = \lambda$. Splošna rešitev je torej enaka

$$u = F(t) + G(t)e^s$$

$$u = F(x+y) + G(x+y)e^x.$$

3. S separacijo spremenljivk poišči rešitev enačbe

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Rešitev: Prek nastavka $u = X(x)T(t)$ dobimo sistem

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \mu \in \mathbb{R}, \ \ X'(0) = X'(\pi) = 0.$$

Najprej pošičemo lastne pare sistema za X. Pri $\mu = 0$ dobimo $X_0 = \text{konst}$. Pri $\mu < 0$ dobimo

$$\mu_n = -n^2, \ \ X_n(x) = \cos(nx), \ \ n \in \mathbb{N}.$$

To porodi sistem za funkcije T

$$\frac{T'}{T} = 0 \Rightarrow T_0(t) = \text{konst},$$

$$\frac{T'}{T} = -n^2 \Rightarrow T_n(t) = C_n e^{-n^2 t},$$

Nastavek za iskanje rešitve je torej

$$u(x,t) = C + \sum_{n=1} C_n e^{-n^2 t} \cos(nx).$$

Z upoštevanjem začetnih pogojev dobimo

$$u(x,0) = C + \sum_{n=1} C_n \cos(nx) = \cos x \Rightarrow C = 0, \ C_1 = 1, \ C_n = 0 \text{ za } n \geq 2$$

Rešitev je torej $u = e^{-t} \cos x$.

4. Podan je funkcional

$$F(y) = \int_a^b L(x,y,y')\mathrm{d}x, \qquad \text{p.p. } \ y(b) = A.$$

a) Pokaži, da je funkcija $y = y(x)$ njegova stacionarna točka natanko tedaj, ko sta izpolnjena pogoja

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) \quad \text{in} \quad \frac{\partial L}{\partial y'}|_{x=a} = 0.$$

b) Poišči in klasificiraj stacionarno točko zgornjega funkcionala za $L(x, y, y') = 1 + y^2 + (y')^2$, $a = 0$, $b = 1$ in $A = e^2 + 1$.

Rešitev:
Kriterij za stacionarne točke je:

$$\mathrm{d}F(y)(h) = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, y')h + \frac{\partial L}{\partial y'}(x, y, y')h'\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x + \frac{\partial L}{\partial y'}|_{x=a}^{x=b} = 0.$$

Izpolnjen mora biti za dopustne variacije. Zanje velja $h(b) = 0$, saj je vrednost iskane funkcije y v točki $x = b$ fiksirana.
Pri točki b) upoštevamo izpeljano pravilo in dobimo enačbo

$$y'' = y \text{ p.p. } y'(0) = 0,\ y(1) = e^2 + 1.$$

Njena rešitev je

$$y = Ce^x + De^{-x},\ C - D = 0,\ Ce + D/e = e^2 + 1,$$

kar pomeni, da je iskana funkcija $y = e^{x+1} + e^{1-x}$. Ker je $M_x = \mathbb{R}^2$ konveksna in H_L diagonalna matrika s številom 2 na diagonali (t.j. $\lambda_{1,2} = 2 > 0$, funkcija L je konveksna), imamo v tej točki minimum.