Prvi kolokvij - PDE(VSŠ)

20.3.2012

1. (25) Podana je linearna parcialna diferencialna enačba

$$xyu_x + u_y = u - 1, \quad x > 0.$$

Z zamenjavo koordinat poišči rešitev, ki zadošča $u(x,0) = xe^x + 1$.

Rešitev: Prvo spremenljivko izberemo, tako da rešimo enačbo

$$xys_x + s_y = 0.$$

Računajmo:

$$\mathrm{d}s = s_x \mathrm{d}x + s_y \mathrm{d}y = 0$$

$$\mathrm{d}x = xy\mathrm{d}y$$

$$\ln x = y^2/2 + C$$

Splošna rešitev je $s = f(\ln x - y^2/2)$, mi vzamemo $s = \ln x - y^2/2$. Kot drugo spremenljivko vzamemo nekaj, kar je neodvisno od s npr. $t = y$ ($t = x$ ni dobra izbira!). V novih koordinatah dobimo:

$$u_x = u_s/x$$

$$u_y = -yu_s + u_t$$

$$xyu_x + u_y = u_t = u - 1$$

Ta enačba ima splošno rešitev

$$ln(u-1) = C(s)t \text{ oz. } u(x,y) = C(\ln x - y^2/2)e^y + 1.$$

Ko vstavimo začetni pogoj, dobimo:

$$u(x,0) = C(\ln x) + 1 = xe^x + 1.$$

Od tod sledi, da je $C(x) = e^{x+e^x}$.

2. (25) Z metodo karakteristik poišči rešitev enačbe

$$xu_x + (1+y)u_y = u + x(1+y), \quad \text{p.p. } u(x,0) = 2x.$$

Ali je enolična?

Rešitev: Karakteristični sistem enačbe je enak

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y + 1, \quad \dot{u} = u + x(1+y).$$

Prvi dve diferencialni enačbi sta navadni z ločljivima spremenljivkami. Dobimo splošni rešitvi $x = Ce^t$ in $y = De^t - 1$. Ko ju vstavimo v tretjo enačbo, dobimo linearno navadno diferencialno enačbo

$$\dot{u} = u + CDe^{2t}.$$

Rešitev homogenehga dela je Ee^t partikularnega pa CDe^{2t} (uganemo ali z variacijo konstante). Torej je $u = Ee^t + CDe^t$.
Sedaj upoštevamo začetne pogoje $x(0) = C = s$, $y(0) = D - 1 = 0$ in $u(0) = E + CD = s$ in dobimo parametrično rešitev

$$x(t,s) = se^t, \quad y(t,s) = e^t - 1, \quad u(t,s) = s(e^t + e^{2t}).$$

Opazimo, da je $e^t = y + 1$ in $s = x/(y+1)$. Zato velja

$$u(x,y) = x + xy + 1.$$

Nazadnje preverimo še transferzalnostni pogoj za $\Gamma(s) = (s, 0, 2s)$ in $(a,b,c) = (s, 1, 3s)$. Dobimo

$$(T) = \det \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0.$$

Rešitev je torej enolična.

3. (25) Določi tip paricalne enačbe drugega reda

$$y^5 u_{xx} - y u_{yy} + 2u_y = 0, \quad y > 0.$$

Pretvori jo v kanonično obliko in poišči njeno splošno rešitev.

Rešitev: Velja $a = y^5$, $b = 0$, $c = -y$ in $D = 4y^6 > 0$. Enačba je hiperbolična. Za novo spremenljivko moramo poiskati rešitev enačbe

$$2y^5 t_x + \sqrt{4y^6} t_y = 0.$$

Računajmo:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}t = t_x \mathrm{d}x + t_y \mathrm{d}y &= 0 \\ \mathrm{d}x &= y^2 \mathrm{d}y \\ x - y^3/3 &= C. \end{aligned}$$

Splošna rešitev zgornje enačbe je torej $t = f(x - y^3/3)$, mi izberemo rešitev $t = x - y^3/3$. Na podoben način dobimo tudi drugo koordinato $s = x + y^3/3$ kot rešitev enačbe

$$2y^5 s_x - \sqrt{4y^6} s_y = 0.$$

Sedaj velja

$$u_x = u_t + u_s, \quad u_{xx} = u_{tt} + 2u_{ts} + u_{ss}$$

$$u_y = y^2(u_s - u_t), \quad u_{yy} = y^4(u_{ss} + u_{tt} - 2u_{st}) + 2y(u_s - u_t).$$

Ko te izraze vstavimo v osnovno enačbo dobimo

$$y^5 u_{xx} - y u_{yy} + 2u_y = 4y^5 u_{ts} = 0.$$

Splošna rešitev slednje enačbe je $u(t, s) = F(t) + G(s)$ oz.

$$u(x, y) = F(x - y^3/3) + G(x + y^3/3).$$

4. (25) Podana je kvazilinearna parcialna diferencialna enačba

$$(u + y^2)u_x + (y + 1)u_y = u^n + 1, \qquad \text{p.p. } u(\alpha y^2, y) = y.$$

V odvisnosti od $\alpha \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$ določi število rešitev za $y > 0$.

Rešitev: Začetna krivulja je enaka $\Gamma(s) = (\alpha s^2, s, s)$, koeficienta na levi strani enačbe pa $a = u + y^2 = s + s^2$ in $b = y + 1 = s + 1$. Transferzalnostni pogoj je torej enak

$$(T) = \det \begin{bmatrix} s + s^2 & s + 1 \\ 2\alpha s & 1 \end{bmatrix} = (s + s^2)(1 - 2\alpha) \neq 0.$$

Če $\alpha \neq 1/2$, obstaja natanko ena rešitev enačbe. Sicer nas zanima, kdaj sta pri $\alpha = 1/2$ vzporedna naslednja vektorja

$$\Gamma'(s) = (s, 1, 1) \text{ in } (a, b, c) = (s + s^2, s + 1, s^n + 1).$$

To se zgodi natanko tedaj, ko je $n = 1$. V tem primeru imamo neskončno mnogo rešitev sistema, sicer pa te ne obstajajo.