Prvi kolokvij - PDE(VSŠ)

Rešitve

1. Z metodo karakteristik poišči eksplicitno rešitev enačbe
$$(2x+u)u_x + (2y+u)u_y = u \ \text{ p.p. } \ u(x,-3x) = x, \quad x > 0.$$
Ali je tako dobljena rešitev enolična?
Rešitev: Karakteristični sistem je enak
$$\dot{x} = 2x+u, \quad \dot{y} = 2y+u, \quad \dot{u} = u.$$
Njegova rešitev je
$$u = Ce^t, \quad x = De^{2t} - Ce^t, \quad y = Ee^{2t} - Ce^t.$$
Iz začetnih pogojev sledi $C = s$, $D = 2s$ in $E = -2s$ in
$$u(x,y) = -\frac{x+y}{2}.$$
Preverimo še transferzalnostni pogoj
$$(T) = \det \begin{bmatrix} 2s+s & -3s+s \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = -7s.$$
Ker $x = s > 0$ je pogoj izpolnjen povsod. Rešitev je enolična.

2. Podana je linearna parcialna diferencialna enačba prvega reda
$$u_x + y^2 u_y = yu, \quad y > 0.$$
Z zamenjavo spremenljivk poišči rešitev pri pogoju $u(x,1) = x^2$.
Rešitev: Za novo spremenljivko rešimo enačbo
$$t_x + y^2 t_y = 0.$$
Dobimo splošno rešitev $t = f(x + 1/y)$. Mi izberemo $t = x + 1/y$. Za $s = s(x,y)$ izberemo funkcijo, ki bo neodvisna od t npr. $s = x$.
V novih koordinatah se enačba glasi
$$u_s = yu \Rightarrow u_s = \frac{u}{t-s}.$$
Splošna rešitev te enačbe je $u = C(t) \cdot (t-s)^{-1}$ oziroma
$$u(x,y) = y \cdot C(x + y^{-1}).$$
Ko upoštevamo še začetni pogoj, dobimo $C(x) = (x-1)^2$ oz.
$$u(x,y) = (x + y^{-1} - 1)^2 y.$$
Opomba: Za $s = s(x,y)$ lahko izberemo tudi $s = y$.

3. Podan je začetni problem

$$(1-x)u_x - yu_y = 0, \;\; u(\alpha, y) = \beta y, \; y > 0.$$

   a) V odvisnosti od $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ določi število njegovih rešitev.
   b) Za $\alpha = 0$ in $\beta = 1$ poišči rešitev z razvojem po spremenljivki x.

   Rešitev: Oglejmo si transferzalnostni pogoj za $\Gamma(s) = (\alpha, s, \beta s)$

$$(T) = \det \begin{bmatrix} 1-\alpha & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 - \alpha.$$

   Za $\alpha \neq 1$ je rešitev ena sama, saj $(T) \neq 0$. Nadalje $\Gamma'(s) = (0, 1, \beta)$ in $(a, b, c) = (0, -s, 0)$ za $\alpha = 1$. Torej, če je $\beta = 0$ sta vektorja vzporedna in imamo neskončno rešitev, sicer pa rešitve ni.
   Za b) v enačbo vstavimo nastavek $u = \sum_{n=0} c_n(y)x^n$. Ko člene malo preuredimo, dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[c_{n+1}(y)(n+1) - c_n(y)n - yc_n'(y)\right] x^n = 0.$$

   Imamo torej $u(0, y) = c_0(y) = y$ in rekurzivno zvezo

$$c_{n+1}(y) = \frac{1}{n+1}(c_n(y)n + yc_n'(y)).$$

   Iz nje ugotovimo, da je $c_n(y) = y$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Imamo torej

$$u(x, y) = y(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = \frac{y}{1-x}.$$

4. Podan je funkcional

$$F(y) = \int_0^{\pi} (y')^2 - y^2 \mathrm{d}x$$

   in pogoji $y(0) = 1$, $y(\pi) = -1$ in $\int_0^{\pi} y\mathrm{d}x = 0$.

   a) Poišči stacionarno točko $y = y(x)$ in pokaži, da je ne moremo klasificirati z izrekom, ki smo ga uporabljali na vajah.
   b) Za stacionarno točko y iz točke a) izračunaj vrednost $F(y)$. Pokaži, da ta vrednost ni Pokaži, da ta vrednost ni maksimalna za F.

Nasvet: Pri b) poišči linearno funkcijo $y = kx + n$, ki zadošča robnima in integralskemu pogoju, ter izračunaj $F(y)$.

Rešitev: Za $L_\lambda = (y')^2 - y^2 + \lambda y$ nam EL sistem da enačbo

$$y'' = -y + \lambda/2$$

oz. $y = C\sin x + D\cos x + \lambda/2$. Iz začetnih pogojev ugotovimo

$$y(0) = D + \lambda/2 = 1,\ y(\pi) = -D + \lambda/2 = -1 \Rightarrow D = 1,\ \lambda = 0.$$

Nadalje velja

$$\int_0^\pi C\sin x + \cos x \mathrm{d}x = 2C = 0.$$

Stacionarna točka je torej $y = \cos x$. Pri klasifikaciji ugotovimo

$$M_x = \mathbb{R}^2,\ \ H_{L_0} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Lastni vrednosti H_{L_0} sta različno predznačeni, izrek ne pomaga.

Za b) najprej izračunamo

$$F(\cos x) = \int_0^\pi \sin^2 x - \cos^2 x \mathrm{d}x = -\int_0^\pi \cos(2x)\mathrm{d}x = 0$$

Premica, ki poteka skozi $(0,1)$ in $(\pi,-1)$ ima enačbo $y = 1 - 2x/\pi$.
Ker velja

$$F(1 - 2x/\pi) = \frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{3} > 0,$$

vrednost v stacionarni točki ni maksimalna.