Drugi kolokvij - PDE(VSŠ) Rešitve

1. Podana je valovna enačba

$$u_{tt} - u_{xx} = 1, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0,$$

in pogoja $u(x,0) = x$ in $u_t(x,0) = x^2$. Poišči rešitev:

a) Z D'Alembertovo formulo.

b) Z razvojem v vrsto.

Rešitev: Uporabimo standardne oznake iz D'alembertove formule: $c = 1$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ in $F(x,t) = 1$. Rešitev je vsota treh delov

$$u_1 = \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2} = x$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\mathrm{d}s = x^2 t + \frac{t^3}{3}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F(\zeta,\tau)\mathrm{d}\zeta = t^2.$$

Isti rezultat dobimo tudi z razvojem $u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)t^n$. Iz začetnih pogojev vemo, da je $c_0(x) = x$ in $c_1(x) = x^2$. Ostale člene razvoja določimo z rekurzivno zvezo, ki jo dobimo iz diferencialne enačbe

$$2c_2(x) = c_0''(x) + 1,$$

$$(n+2)(n+1)c_n(x) = c_n''(x), \text{ za } n \geq 1.$$

Rešitev je torej $u(x,t) = x + x^2 t + t^2 + \frac{1}{3}t^3$.

2. Z uporabo Fourierieve transformacije poišči rešitev toplotne enačbe

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad \text{p.p. } u(x,0) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Rešitev: Naj bo $U = \mathcal{F}(u)$. Tedaj velja

$$U_t + x^2 U = 0.$$

Splošna rešitev zgornje diferencialne enačbe je $U = C(x)e^{-tx^2}$. Funkcijo $C(x)$ določimo z upoštavnjem začetnega pogoja

$$C(x) = U(x,0) = \mathcal{F}(u)(x,0) = \mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2}}) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Dobimo $U = \sqrt{2\pi} e^{-(t+1/2)x^2}$. Ker je funkcija U soda, je rešitev osnovne enačbe

$$u = \mathcal{F}^{-1}(U) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(U) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+2}}.$$

Opomba: v nalogi smo uporabili rezultat, ki smo ga izpeljali na vajah:

$$\mathcal{F}\left(e^{-\alpha x^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}.$$

3. S separacijo spremenljivk poišči rešitev enačbe

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x, y < \pi,$$

$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0, \quad 0 \le y \le \pi,$$
$$u(x,0) = u(x,\pi) = \cos x, \quad 0 \le x \le \pi.$$

Rešitev: Z nastavkom $u = X(x)Y(y)$ pridemo do enačb

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \mu \in \mathbb{R}.$$

Homogeni robni pogoj pove:

$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0 \Rightarrow X'(0) = X(\pi) = 0.$$

Z obravnavo vseh možnosti ugotovimo, da rešitev obstaja v primeru, ko je $\mu = 0$, in sicer $X = A$, in v primeru, ko je $\mu = -k^2$, $k \in \mathbb{N}$, in sicer $X_k = A_k \cos(kx)$. V obeh primerih obravnavamo tudi enačbo za funkcijo Y in dobimo: $Y = By + C$, ko $\mu = 0$, in $Y_k = B_k e^{ky} + C_k e^{-ky}$ za $k \in \mathbb{N}$. Splošna rešitev enačbe je torej

$$u(x,y) = Dy + E + \sum_{k=1}^{\infty} \left(D_k e^{ky} + E_k e^{-ky}\right) \cos(kx).$$

Sedaj upoštevamo še robni pogoj:

$$u(x,0) = E + \sum_{k=1}^{\infty} (D_k + E_k) \cos(kx) = \cos(x),$$

$$u(x,\pi) = D\pi + E + \sum_{k=1}^{\infty} \left(D_k e^{k\pi} + E_k e^{-k\pi}\right) \cos(kx) = \cos(x).$$

Ugotovimo, da je $E = D = D_k = E_k = 0$ za $k \ge 2$ in da sta koeficienta D_1 in E_1 rešitev sistema

$$D_1 + E_1 = 1 \text{ in } D_1 e^{\pi} + E_1 e^{-\pi} = 1.$$

4. Podan je funkcional

$$F(y) = \int_a^b L(x, y', y'')\mathrm{d}x, \qquad \text{p.p. } y(a) = A,\ y(b) = B.$$

a) Pokaži, da je funkcija $y = y(x)$ njegova stacionarna točka natanko tedaj, ko sta izpolnjena pogoja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right) \quad \text{in} \quad \frac{\partial L}{\partial y''}|_{x=a} = \frac{\partial L}{\partial y''}|_{x=b} = 0.$$

b) Poišči in klasificiraj stacionarno točko zgornjega funkcijonala za $L(x, y', y'') = 1 + (y')^2 + (y'')^2$, $a = 0$, $b = 1$ in $A = B = 2$.

Rešitev: Funkcija $y = y(x)$ je stacionarna točka, ko je odvod

$$\mathrm{d}F(y) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\left(F(y + \epsilon h) - F(y)\right) = 0.$$

Za dopustno variacijo $h \in \mathcal{C}^2([a, b])$ mora veljati pogoj $h(a) = h(b) = 0$. Prek Taylorjevega razvoja in integracije per partes dobimo za $\mathrm{d}F(y)$ naslednji izraz

$$\mathrm{d}F(y) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y'}\epsilon h' + \frac{\partial L}{\partial y''}\epsilon h'' + o(\epsilon^2)\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y'}h' + \frac{\partial L}{\partial y''}h''\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\partial L}{\partial y''}h'|_{x=b} - \frac{\partial L}{\partial y''}h'|_{x=a} \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\right) h\mathrm{d}x = 0$$

Ker mora veljati za poljubno variacijo h, je to ekvivalentno zgoraj navedenim pogojem.

V primeru, ko je $L = 1 + (y')^2 + (y'')^2$ dobimo navadno diferencialno enačbo

$$y'''' - y'' = 0 \qquad \text{p.p. } y''(0) = y''(1) = 0 \text{ in } y(0) = y(1) = 2.$$

Splošna rešitev je $y = Ax + B + Ce^x + De^{-x}$, iz pogojev pa ugotovimo, da morajo biti $A = C = D = 0$ in $B = 2$. Ker velja

$$M_x = \{(y', y'');\ (x, y', y'') \in \mathcal{D}_L\} = \mathbb{R}^2 \text{ in } H_L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

sta tako funkcija L kot množica M_x konveksni. To pomeni, da je funkcija $y = 2$ minimum funkcionala.