Drugi kolokvij - PDE(VSŠ)

23.4.2014

1. Podana je parcialna diferencialna enačba

$$u_{xx} + 6u_{xy} - 16u_{yy} = 0.$$

   a) Pretvori jo v kanonično obliko in poišči splošno rešitev.

   b) Pokaži, da ne obstaja rešitev enačbe, ki bi zadoščala pogojema $u(x, 3x) = 0$ in $u(x, -2x) = 10x + 1$.

Rešitev: Ker $\delta = 25 > 0$ je enačba hiperbolična. Ko rešimo enačbi

$$t_x + 8t_y = 0 \ \text{ins}_x - 2s_y = 0,$$

dobimo spremenljivki $t = 8x - y$ in $s = 2x + y$. V njih rešimo

$$100u_{ts} = 0 \Rightarrow u = F(t) + G(s) = F(8x - y) + G(2x + y).$$

Oglejmo si še začetne pogoje

$$u(x, 3x) = F(5x) + G(5x) = 0 \Rightarrow F(x) = -G(x),$$

$$u(x, -2x) = F(10x) + G(0) = F(10x) - F(0) = 10x + 1.$$

Če v zadnjo enačbo vstavimo $x = 0$ dobimo $0 = 1$, kar je protislovje.

2. a) Razvij funkcijo $f(x) = x$ v vrsto sinusov na $[0, \pi]$.

   b) S separacijo spremenljivk poišči rešitev toplotne enačbe

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

   pri pogojih $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ in $u(x, 0) = x$.

Rešitev: Najprej z metodo per partes izračunamo koeficiente sinusnega razvoja

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Nato v enačbo vstavimo nastavek $u = X(x)T(t)$. Dobimo

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \mu \in \mathbb{R} \ \text{ in } \ X(0) = X(\pi) = 0.$$

Obravnavamo robni problem za funkcijo X v primerih, ko $\mu > 0$, $\mu = 0$ in $\mu < 0$. V prvih dveh primerih dobimo le $X \equiv 0$. V tretjem primeru dobimo $\mu = -k^2$ in $X_k = C_k \sin(kx)$ za $k \in \mathbb{N}$.

Pripadajočo funkcijo T_k poiščemo z reševanjem enačbe

$$T_k' = -k^2 T_k \Rightarrow T_k = D_k e^{-k^2 t}.$$

Za $E_k = C_k D_k$ se splošna rešitev enačbe glasi

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sin(kx) e^{-k^2 t}.$$

Ko upoštevamo še začetni pogoj dobimo

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sin(kx) = x \Rightarrow E_k = b_k.$$

3. Podana je nehomogena valovna enačba

$$u_{tt} - u_{xx} = t, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   a) Z D'Alembertovo formulo poišči njeno rešitev pri pogoju $u(x,0) = u_t(x,0) = x^2$.
   b) Določi limito $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ pri pogoju

$$u(x,0) = u_t(x,0) = \left\{ \begin{array}{ll} x, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{array} \right. .$$

Rešitev: Prepišimo podatke iz točke a) v stadndardne oznake: $c = 1$ in $f(x) = g(x) = x^2$ in $F(\zeta, \tau) = \tau$. Rešitev je vsota treh delov:

$$I = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] = x^2 + t^2,$$

$$II = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds = 2x^2 t + t^3/3,$$

$$III = \frac{1}{2c}\int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \tau = t^3/6.$$

Podobno obravnavamo tudi točko b). Opazimo, da je

$$I = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] = 0,$$

$$II = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} sds = 0,$$

ko gre $t \to \infty$. Ker je nehomogena rešitev ostane nespremenjena oz. je $III = t^3/6$, opazimo, da je $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \infty$.

4. Podana je enačba

$$u_{xx} + u_{tt} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

S Fourierjevo transformacijo $\mathcal{F}$ (po spremenljivki x) poišči integralsko rešitev pri pogoju $u(x,0) = e^{-x^2/2}$ in $u_t(x,0) = 0$.

Rešitev: Uvedemo $U = \mathcal{F}(u)$ in dobimo

$$(ix)^2 U + U_{tt} = 0 \Rightarrow U_{tt} = x^2 U \Rightarrow U = C(x)e^{xt} + D(x)e^{-xt}.$$

Sedaj upoštevamo začetne pogoje dobimo

$$U(x,0) = \mathcal{F}(u)(x,0) = \sqrt{2\pi}e^{-x^2/2} = C(x) + D(x)$$

$$U_t(x,0) = \mathcal{F}(u_t)(x,0) = 0 = x(C(x) - D(x)).$$

Torej je

$$U = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}e^{-x^2/2}(e^{xt} + e^{-xt}) = \sqrt{2\pi}e^{-x^2/2}\cosh(xt)$$

oz.

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(U)(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs-s^2/2}\cosh(st)ds.$$