

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

STATISTIKA

PISNI IZPIT

30. AVGUST 2002

IME IN PRIIMEK: _____

VPISNA ŠT:

--	--	--	--	--	--	--	--

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, na razpolago pa imate 120 minut.

Naloga	a.	b.	
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Med $2N$ športniki je N moških in N žensk.

- a. (10) Športnike moramo razdeliti na N skupin po 2 tako, da je v vsaki skupini en moški in ena ženska. Na koliko načinov lahko to naredimo?
- b. (10) Za naslednje tekmovanje moramo $2N$ športnikov spet razdeliti na N skupin po 2, le da zdaj spol ni pomemben. V skupini sta lahko športnika istega spola. Na koliko načinov lahko to naredimo?

Namig: Izbirajte pare po vrsti. Preverite rezultat za $N = 2$.

2. (20) Črke A,A,A,A,A,B,B,K,D,R,R naključno permutiramo, tako da je vsak vrstni red enako verjeten. Označimo

$$B = \{\text{prva črka v slučajni permutaciji je A}\}$$

in

$$C = \{\text{slučajna permutacija črk ni ABRAKADABRA}\}.$$

- a. (10) Izračunajte $P(C^c)$.
- b. (10) Izračunajte pogojno verjetnost $P(C|B)$.

Namig: $P(B \cap C) = P(B) - P(B \cap C^c)$.

3. (20) Na klopi sedi 8 šestošolcev, 7 sedmošolcev in 9 osmošolcev. Naključno izberemo odbojgarsko ekipo šestih učencev. Naj X označuje število sedmo- in osmošolcev v ekipi.

- a. (10) Izračunajte verjetnost, da sta v ekipi 2 šestošolca, dva sedmošolca in 2 osmošolca.
- b. (10) Izračunajte $E(X)$.

4. (20) Slučajne spremenljivke $Z_0, Z_1, \dots$ naj imajo rodovne funkcije $G_0, G_1, \dots$. Naj bo $G_0(s) = s$ in naj za $n \geq 0$ velja

$$G_{n+1}(s) = \frac{1}{3} \left(s + 1 + \frac{1}{s} \right) (G_n(s) - G_n(0)) + \frac{1}{3} G_n(0) (s + 2).$$

a. (10) Poiščite porazdelitev spremenljivke Z_2 .

b. (10) Pokažite, da velja

$$E(Z_{n+1}) = E(Z_n) + \frac{1}{3} G_n(0)$$

in izračunajte $E(Z_3)$.

Namig: Odvajajte zvezo med G_n in G_{n+1} po s .

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana z

$$P(X = k, Y = l) = \binom{k+l}{l} \frac{1}{3^{k+l+1}} = \binom{-k-1}{l} \frac{(-1)^l}{3^{k+l+1}}.$$

za $k, l = 0, 1, 2, \dots$

a. (10) Izračunajte $P(X = k)$ za $k = 0, 1, 2, \dots$

Namig: Upoštevajte

$$\sum_{l=0}^{\infty} \binom{-k-1}{l} (-x)^l = (1-x)^{-(k+1)}.$$

b. (10) Izračunajte $E(Y|X)$.

Namig: Kot znano upoštevajte, da je za $|x| < 1$

$$\sum_{l=0}^{\infty} l \binom{-k-1}{l} (-x)^l = (k+1)x(1-x)^{-(k+2)}.$$

6. (20) Iz škatle $\begin{bmatrix} -a & 0 & a \end{bmatrix}$ naključno izberemo n listkov z vračanjem. Označimo števila na listkih z $X_1, X_2, \dots$ in naj bo $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

a. (10) Naj bo $a = 1$. Izračunajte $P(-200 \leq S_n \leq 200)$ za $n = 133415$.

b. (10) Naj bo $n = 10000$ in naj velja

$$P(-418 \leq S_{10000} \leq 418) = 0,99.$$

Izračunajte a .