FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Pisni izpit

28. avgust 2003

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

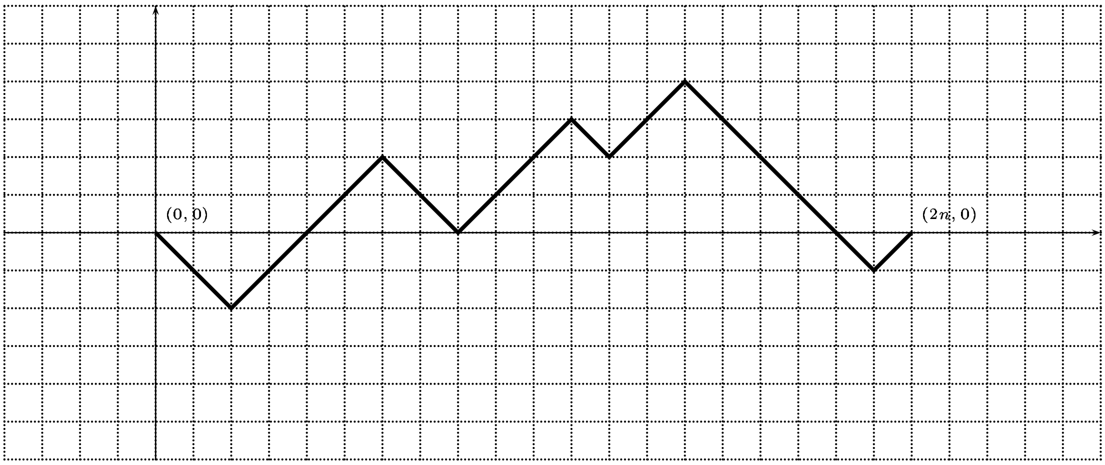
Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, na razpolago pa imate 120 minut.

Naloga	a.	b.	
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (40) Dyckove poti v $\mathbb{Z}^2$ se vedno začno v točki (k, l), kjer sta k in l celi števili. Vsak korak poti gre iz točke (m, n) ali v točko $(m+1, n+1)$ ali točko $(m+1, n-1)$, kjer sta vedno m in n celi števili.

a. (10) Preštejte vse Dyckove poti iz točke $(0,0)$ do točke $(0, 2n)$. Primer take poti je na sliki 1a.

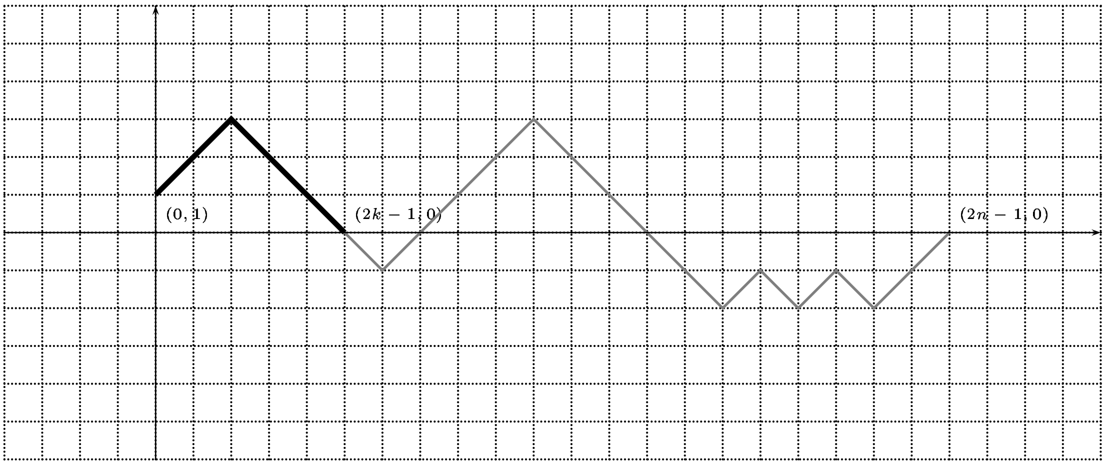


Slika 1a Primer Dyckove poti iz $(0,0)$ v $(2n, 0)$.

b. (10) Število vseh Dyckovih poti iz točke $(0,1)$ do točke $(2n-1, 0)$ je $\binom{2n-1}{n}$. Naj bo u_{2k-1} število Dyckovih poti iz točke $(0,1)$ do $(2k-1, 0)$, ki se prvič dotaknejo abscisne osi v točki $(2k-1, 0)$. Primer take poti je izrisan s polno črto na sliki 1b. Pokažite, da velja

$$\binom{2n-1}{n} = \sum_{k=1}^{n} u_{2k-1} \binom{2n-2k}{n-k}.$$

Namig: Pot od $(2k-1, 0)$ *do* $(2n-1, 0)$ *je Dyckova pot dolžine* $2n-2k$.



Slika 1b Primer Dyckove poti iz $(0,1)$ v $(2n-1,0)$, ki se prvič dotakne abscise v točki $(2k-1,0)$.

c. (10) Kot znano privzemite, da je

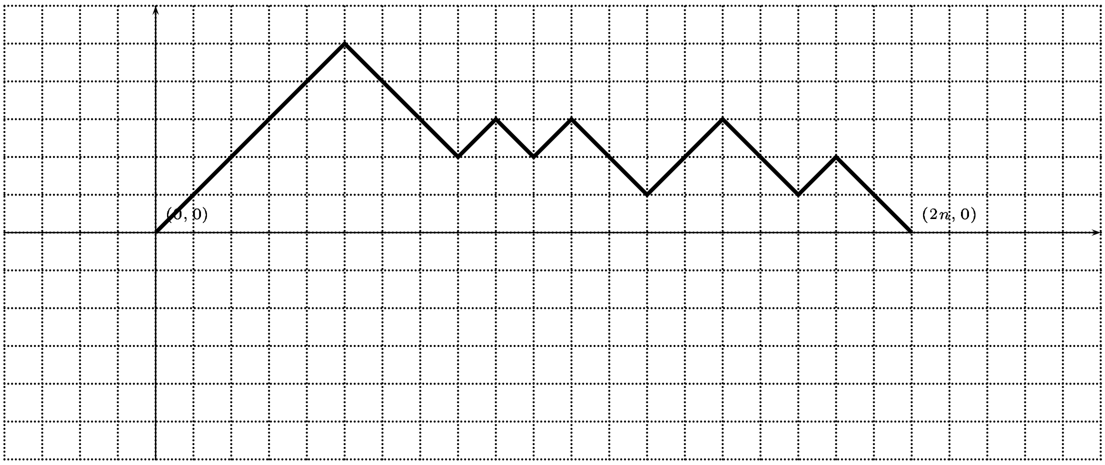
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k-1} \binom{2k-1}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \binom{2n-1}{n} \frac{2n-2}{2n-1}.$$

Z uporabo b. in matematične indukcije dokažite, da je

$$u_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \binom{2k-1}{k}.$$

d. (10) Enostranske Dyckove poti iz točke $(0,0)$ v točko $(0,2n)$ so take, ki nikoli ne zdrsnejo pod abscisno os. Primer take poti je na sliki 1c. Označimo število takih pot z v_{2n}. Pokažite, da velja

$$v_{2n} = \sum_{k=1}^{n} u_{2k-1} v_{2n-2k}.$$



Slika 1c Primer enostranske Dyckove poti iz $(0, 0)$ v $(2n, 0)$.

2. (20) Na vesoljski postaji se mora v vsakem trenutku nahajati 5 astronavtov, trije izkušeni in dva neizkušena. V primeru, da pride do zunanje napake na postaji, naključno izberejo astronavta, ki naj bi napako odpravil. Pri tem je verjetnost, da pošljejo na delo izkušenega astronavta enaka $0,25$, verjetnost, da izberejo neizkušenega pa dvakrat manjša.
Verjetnost, da astronavt zabrede v še večje težave, medtem ko poskuša odpraviti napako, je enaka 0,1 za izkušenega astronavta, za neizkušenega pa 0,25.

a. (10) Določite verjetnost, da ob zunanji napaki vesoljske postaje astronavti zabredejo v še hujše težave, kot tiste, v katerih so trenutno.

b. (10) Nekega nesrečnega dne na zemeljski postaji, ki nadzira vesoljsko postajo, dobijo sporočilo, da so med odpravljanjem napak zabredli v težave. Kolikšna je verjetnost, da so v akcijo poslali neizkušenega astronavta?

3. (20)Dani sta dve pošteni igralni kocki. Njuna meta sta med seboj neodvisna. Označimo z X slučajno spremenljivko, ki pove vsoto pik na obeh kockah, z Y pa slučajno spremenljivko, ki pove večje število pik.

a. (5) Določite porazdelitvi slučajnih spremenljivk X ter Y.

b. (5) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $X - Y$.

c. (5) Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni?

d. (5) Določite še $E(X)$ in $E(Y)$.

4. (20) V genetiki imamo naslednjo nalogo: na začetku imamo eno bakterijo. V trenutkih $n = 0, 1, \ldots$ se lahko zgodi dvoje: vse bakterije se razdelijo v dve z verjetnostjo p, ali pa se ne zgodi nič z verjetnostjo $q = 1-p$. Označimo z Z_n slučajno število bakterij v trenutku n. Z $G_n(s)$ označimo rodovno funkcijo slučajne spremenljivke Z_n. Velja $G_0(s) = s$ in

$$G_{n+1}(s) = qG_n(s) + pG_n(s^2)\,.$$

a. (10) Pokažite, da velja

$$E(Z_{n+1}) = (1+p)E(Z_n)$$

in izračunajte $E(Z_n)$.

b. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da je

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\, s^{2^k}\,.$$

Izračunajte $P(Z_n = k)$ za vse $k = 1, 2, \ldots$.

Namig: Po Pascalu je

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\,.$$

5. (20) Na nevarnem gozdnem odseku dolžine 1 km se pogosto podirajo drevesa. Če drevo pade čez cesto, le-ta ni več prevozna od točke nesreče naprej. Razdalja prevoznosti poti do zapore naj bo podana s slučajno spremenljivko X, katere gostota je enaka $f_X(x) = Ax(1-x^2)$ za $x \in [0,1]$.

a. (10) Določite A tako, da bo to res gostota in izračunajte $E(X)$.

b. (5) Denimo, da želimo skreniti s ceste po 0,5 km poti. Določite verjetnost, da je cesta prevozna do tega odcepa.

c. (5) Denimo, da želimo skreniti s ceste po 0,5 km poti in smo že prevozili 0,2 km nevarnega odseka. Določite verjetnost, da bo cesta prevozna do našega odcepa.

6. (20) V igralnici Perla v Novi Gorici je gost Gregoroni pred kratkim priigral 144.000 evrov. Iz razpoložljivih podatkov je bilo razvidno, da je vztrajno igral na isti način: vedno je stavil skupno 500 evrov. Od tega je stavil vedno 200 evrov na "polno" na številko 17, 300 evrov pa na "konja" iz številk 16 in 17. Pri igri na "polno" vam pri dobljeni igri vrnejo stavo in izplačajo se 35-krat toliko, sicer izgubite stavo. Pri konju vam v pri dobljeni igri vrnejo stavo in izplačajo še 17-krat toliko, sicer stavo izgubite.

Na ruleti je 37 številk, ki se pojavijo z enako verjetnostjo, posamezne igre pa so med sabo neodvisne.

a. (10) Označite z X čisti dobitek gosta v eni igri z zgoraj opisanimi stavami. Ugotovite, kakšne vrednosti lahko ima X s kakšnimi verjetnostmi in izračunajte $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

b. (10) Gost Gregoroni je svoj dobitek priigral v 582 igrah. Izračunajte verjetnost dobitka enakega ali večjega kot ga je s svojo igro priigral gost Gregoroni za število iger enako $n = 582$.