

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

STATISTIKA

PISNI IZPIT

1. DECEMBER 2005

IME IN PRIIMEK: \_\_\_\_\_ VPISNA ŠT:

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, na razpolago pa imate 120 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (30) Stirlingovo število  $S_k^n$  pove, na koliko načinov lahko razdelimo množico z  $n$  elementi na  $k$  disjunktih, nepraznih podmnožic, katerih unija je enaka dani množici. Taki razdelitvi pravimo *particija*.

Primer: Recimo, da je dana množica  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , torej  $n = 5$ . Razdeliti jo želimo na 4 neprazne, disjunktne podmnožice. Možne particije so:

$$\begin{aligned} &\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5\} \\ &\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{3, 5\} \\ &\{1\}, \{2\}, \{5\}, \{3, 4\} \\ &\{1\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 5\} \\ &\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 4\} \\ &\{1\}, \{4\}, \{5\}, \{2, 3\} \\ &\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 5\} \\ &\{2\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 4\} \\ &\{2\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 3\} \\ &\{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\} \end{aligned}$$

Torej je  $S_4^5 = 10$ .

- (10) Pokažite, da je  $S_2^n = 2^{n-1} - 1$  in  $S_{n-1}^n = \binom{n}{2}$  za vsak  $n$ .
- (10) Utemeljite, da je za  $k \geq 2$

$$S_k^{n+1} = S_{k-1}^n + kS_k^n.$$

*Namig:* Element  $n + 1$  lahko ali dodate v že obstoječo podmnožico ali pa ostane sam v svoji podmnožici.

- (10) Na razpolago imate 4 različne barve, s katerimi bi radi pobarvali 7 hiš. Na koliko različnih načinov lahko to naredite, s tem, da vsako barvo uporabite *vsaj enkrat*.

*Namig:* Upoštevajte b.

2. (20) V  $r$  škatel mečemo  $n$  kroglic. Meti so med sabo neodvisni, posamezno škatlico pa zadenemo z verjetnostjo  $1/r$ . Privzemite, da je  $n \geq r$ . Naj bo  $A_k$  dogodek, da je po  $n$  metih v  $k$ -ti škatlici vsaj ena kroglica za  $k = 1, 2, \dots, n$ .

- (10) Izračnajte  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k)$ .
- (10) Izračunajte

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r).$$

*Namig:* Uporabite formulo za vključitve in izključitve.

3. (20) Naj bo  $X \sim \text{Bin}(n, 1/2)$ . Za slučajni spremenljivki  $X$  in  $Y$  naj za  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  velja

$$P(X = k, Y = k + 1) = P(X = k) \cdot \frac{n - k}{n},$$

$$P(X = k, Y = k - 1) = P(X = k) \cdot \frac{k}{n}$$

in  $P(X = k, Y = l) = 0$  za  $|k - l| > 1$ .

- a. (10) Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke  $Y$ .
- b. (10) Izračunajte  $\text{cov}(X, Y)$ .

4. (20) Pri sortiranju z algoritmom QuickSort je za sortiranje  $n$  elementov potrebno  $X_n$  primerjav, kjer je  $X_n$  slučajna spremenljivka. Označimo z  $G_n$  rodovno funkcijo spremenljivke  $X_n$ . Velja zveza

$$G_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s^{n-1} G_{k-1}(s) G_{n-k-1}(s),$$

kjer je  $G_1(s) = 1$ ,  $G_2(s) = s$  in interpretiramo  $G_{-1}(s) = 1$ .

- (10) Izračunajte porazdelitev  $X_4$ .
- (10) Označite  $\mu_n = E(X_n)$ . Pokažite, da za  $n > 2$  velja

$$\mu_n = \sum_{k=1}^n ((n-2) + \mu_{k-1} + \mu_{n-k-1}).$$

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk  $X$  in  $Y$  je dana s tabelo:

$Y \setminus X$	1	2	3
1	$\frac{4}{45}$	$\frac{8}{45}$	*
2	$\frac{2}{45}$	*	*
3	$\frac{2}{45}$	*	*
4	$\frac{2}{45}$	*	*

- (10) Dopolnite tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki  $X$  in  $Y$  neodvisni.
- (10) Dopolnite tabelo tako, da bo veljalo  $P(X = 3, Y = k) = \frac{k}{45}$ ,  $E(X|Y = 3) = \frac{21}{10}$  in  $E(X|Y = 4) = \frac{24}{11}$ .

6. (20) Čarovnik ima dve škatli: prvo s povprečjem 1 in standardnim odklonom 10, drugo pa s povprečjem -1 in standardnim odklonom 10. Ponuja nam naslednjo igro na srečo: naskrivaj bo izbral eno izmed škatel, vsako z verjetnostjo  $1/2$ . Nato bo iz izbrane škatle izbral  $n = 100$  listkov s ponavljanjem in nam povedal vsoto. Če prav uganemo, katero škatlo je izbral, dobimo nagrado. Odločimo se, da bomo uganjevali na naslednji način: če je vsota pozitivna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem 1, če pa bo vsota negativna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem -1.

- a. (10) Recimo, da čarovnik izbere škatlo s povprečjem 1, vendar vam tega ne pove. Kolikšna približno je verjetnost, da boste prav uganili na podlagi vsote števil na 100 naključno izbranih lističih.

*Namig: Računate  $P(S_{100} > 0)$ .*

- b. (10) Recimo spet, da je čarovnik izbral škatlo s povprečjem 1. Kolikokrat bi moral izbirati lističe in nam povedati vsoto, da bi uganili prav z verjetnostjo približno 0,99?