FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

# Statistika

Pisni izpit

14. junij 2002

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

## Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, na razpolago pa imate 120 minut.

| Naloga | a. | b. | c. | d. | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | | | | | |
| 2. | | | • | • | |
| 3. | | | • | • | |
| 4. | | | • | • | |
| 5. | | | • | • | |
| 6. | | | • | • | |
| Skupaj | | | | | |

**1.** (20) Nogometna vročica se vedno traja. Selektor slovenske reprezentance Srečko Katanec je v Korejo pripeljal 23 igralcev: 3 vratarje, 6 branilcev, 9 veznih igralcev in 5 napadalcev. Odgovorite na spodnja vprašanja, pri čemer **ni potrebno** izračunati binomskih simbolov.

a. (5) Na koliko načinov lahko Srečko sestavi prvo enajsterico, v kateri bodo vratar, trije branilci, štirje vezni igralci in trije napadalci?

b. (5) Na koliko načinov lahko Srečko razdeli drese s številkami od 1 do 11 igralcem prve enajsterice, če mora imeti vratar dres s številko 1?

c. (5) Na koliko načinov lahko Srečko razdeli drese s številkami od 1 do 11 med svojih 23 izbrancev?

d. (5) Na koliko načinov lahko Srečko razdeli drese s številkami od 1 do 11 med svojih 23 izbrancev, če mora številko 1 dobiti vratar, ostale pa drugi igralci (ki seveda niso vratarji)?

**2.** (20) Nogometaši A, B in C med treningom izmenično streljajo na gol. Verjetnost, da zadene A, je enaka $\frac{1}{5}$, verjetnost, za zadene B, je enaka $\frac{2}{5}$ in verjetnost, da zadene nogometaš C, je enaka $\frac{3}{5}$. Vsi streli na gol so med seboj neodvisni.

a. (10) V prvi rundi strelja vsak igralec dvakrat. Določi verjetnost, da sta bila skupno dosežena vsaj dva gola.

b. (10) V drugi rundi je streljal vsak nogometaš enkrat. Dosežena sta bila dva gola. Določi pogojno verjetnost, da gola ni zadel nogometaš C.

**3.** (20) Igralci $A$, $B$ in $C$ igrajo naslednjo igro: v posodi je $a$ belih in $b$ črnih kroglic. Igralci izbirajo kroglice naključno z vračanjem v vrstnem redu $ABCABC\ldots$ [1]

a. (10) V igri zmaga igralec, ki prvi izvleče belo kroglico. Izračunajte verjetnosti za zmago za posamezne igralce.

b. (10) Spremenimo pravila igre tako, da vsak, ki izvleče črno kroglico, le-to vrne in doda še eno črno kroglico. Izračunajte verjetnost, da se bo igra končala točno po $n$ rundah.

[1] Problem iz knjige Christian Huygens *De Raciociinis in Ludo Aleae*, 1657. Christian Huygens (1629-1695), nizozemski matematik.

**4.** (20) Celoštevilske slučajne spremenljivke $Z_0, Z_1, \ldots$ naj imajo rodovne funkcije $G_0(s) = s$ in $G_1, G_2, \ldots$. Za rodovne funkcije naj velja zveza

$$G_{n+1}(s) = \frac{s}{2}\left(G_n(s) + G_n(0)\right) + \frac{1}{2s}\left(G_n(s) - G_0(s)\right) .$$

a. (10) Izračunajte porazdelitev spremenljivke $Z_2$.

b. (10) Pokažite, da velja

$$P(Z_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}\,P(Z_n = 1)\,.$$

**5.** (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk $X$ in $Y$ je dana s tabelo:

| $Y \backslash X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{3}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | 0 |
| 2 | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | 0 |
| 3 | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{b}{24}$ |
| 4 | $\frac{1}{24}$ | $\frac{a}{24}$ | $\frac{c}{24}$ |

a. (10) Določite število $a$ tako, da bo $E(Y|X=2) = 3$.

b. (10) Določite števila $a$,$b$ in $c$ tako, da bo $E(Y|X) = X + 1$.

**6.** (20) Kovanec mečemo $2n$-krat. Meti so neodvisni, verjetnost za grb pa je $p = 1/2$. Označimo število grbov v $2n$ metih z $S_{2n}$.

a. (10) Kolikšen mora biti $n$, da bo veljalo

$$P(S_{2n} = n) = 0,01\,?$$

Ocenite z uporabo $\Phi(0,0125) = 0,505$.

b. (10) Naj bo $n = 5000$. Kolikšna je verjetnost, da se število grbov in število številk v $2n = 10000$ metih razlikujeta 100 ali manj?

*Namig: Kolikšno mora biti število grbov, da se število grbov in število številk razlikujeta 100 ali manj?*