FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Pisni izpit

28. junij 2002

Ime in priimek: ______________________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, na razpolago pa imate 120 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.				•	
2.			•	•	
3.				•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Pri žrebanju igre Loto je v bobnu 39 kroglic, na katerih so napisane številke od 1 do 39. Denimo, da A. igra Loto tako, da na lističu obkroži 10 številk.

a. (5) Na koliko načinov lahko A. zadane sedmico (torej brez dodatne številke)?

b. (5) Na koliko načinov lahko A. zadane sedmico (torej brez dodatne številke) ali pa dobitek 6+1 (torej 6 pravilnih izmed prve sedmerice izžrebanih številk in še dodatno število)?

c. (10) Denimo, da je A. na tem lističu zadel sedmico že po rednem delu žrebanja. V tem krogu je bila sedmica vredna 686.954.518,00 SIT, šestica 241.120,00 SIT, petica 7.224,00 SIT in štirica 760,00 SIT. Koliko zasluži s tako izpolnjenim lističem?

2. (20) V bobnu igre Loto so bile v nedeljo dopoldan še vedno kroglice s številkami od 1 do 39.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bo vseh sedem izžrebanih številk manjših ali enakih 20?

b. (10) Tik pred žrebanjem je neznani nepridiprav (očitno preveč vneti hazarder) iz bobna ukradel kroglico, ne da bi to kdorkoli opazil. Kroglico je izbral povsem naključno. Pri žrebanju dobitne kombinacije so izžrebali 7 kroglic. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je bila ukradena kroglica z liho številko, če je bilo vseh sedem izžrebanih številk sodih?

3. (20) Porazdelitev slučajne spremenljivke X je podana s rekurzivno s predpisom:

$$P(X = k) = c \cdot \frac{a}{k} P(X = k - 1)$$

za dan $a > 0$ in neko konstanto c?

a. (5) Določite konstanto c.

b. (5) Izračunajte $E(X)$.

c. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$

4. (20) V procesu razvejanja lahko dopuščamo, da se v vsako generacijo "vseli" še slučajno mnogo pozameznikov. Naj bo Z_n število posameznikov v n-ti generaciji in označimo rodovno funkcijo Z_n z G_n. Velja zveza

$$G_{n+1}(s) = G_n(G(s)) \cdot H(s)\,,$$

kjer je $G_0(s) = s$, $G(s)$ rodovna funkcija slučajnega števila potomcev posameznika, $H(s)$ pa je rodovna funkcija slučajnega števila "priseljencev" v vsaki generaciji.

a. (10) Predpostavite, da je $G(s) = (s+1)/2$ in $H(s) = (s+1)/2$. Izračunajte $P(Z_2 = 0)$.

b. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da je $E(Z_n) = 1$ za vsak $n \geq 1$.

Namig: Odvajanje rodovnih funkcij.

5. (20) Iz množice $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ naključno in neodvisno z vračanjem izberemo podmnožici A in B. Vsaka od 2^n možnih podmnožic bo izbrana z verjetnostjo 2^{-n}. Naj bo $X = \mathrm{card}(A \cap B)$ in $Y = \mathrm{card}(A \cup B)$. Velja

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}, \qquad P(Y = l) = \binom{n}{l} \left(\frac{3}{4}\right)^l \left(\frac{1}{4}\right)^{n-l}$$

in

$$P(X = k, Y = l) = \frac{n!}{k! \cdot (l-k)! \cdot (n-l)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+k-l}$$

za $0 \leq k \leq l \leq n$.

a. (10) Pokažite, da je

$$P(X = k | Y = l) = \binom{l}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{l-k}.$$

b. (10) Izračunajte $E(X|Y)$.

6. (20) Predlagana je naslednja igra na srečo: nasprotnika A in B bosta vsak zase vrgla pošten kovanec 1000-krat. Naj bo X število grbov igralca A in Y število grbov igralca B. Če je $|X - Y| \leq 15$, zmaga A, sicer zmaga B.

a. (10) Pri metu dveh kovancev so 4 možni izidi: GG, GŠ, ŠG, ŠŠ. Vsak izid ima verjetnost 1/4. Razlika $X - Y$ je kot vsota 1000 slučajnih števil, ki jih dobimo z naključnim izbiranjem z vračanjem iz škatle

$$\boxed{-1}\quad\boxed{0}\quad\boxed{0}\quad\boxed{1}$$

Utemeljite zakaj!

b. (10) Izračunajte verjetnost, da zmaga igralec A.