FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Pisni izpit

12. junij 2003

Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, na razpolago pa imate 120 minut.

Naloga	a.	b.	
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo r fiksno pozitivno celo število. Z $x_1, x_2, \ldots, x_r$ označimo nenegativna cela števila.

a. (10) Pokažite, da je različnih r-teric oblike $(x_1, \ldots, x_r)$, takih da je

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r \leq n$$

za dano pozitivno celo število n, enako

$$\binom{n+r}{r}.$$

Namig: Zapišite n enic kot $|1|1|1|\cdots|1|$ in izbirajte r pregrad s ponavljanjem.

b. (10) Uporabite a. za dokaz identitete

$$n + rn = \sum_{j=0}^{n} \binom{j+r-1}{r-1}.$$

Namig: Preštejte vse rešitve v a. na drug način tako, da najprej preštejete vse možnosti, ki dajo vsoto natanko $0 \leq r \leq n$.

2. (20) Pipi in Melhijad, mali in veliki pujs, se igrata nenavadno igrico. Pipi stoji na stolu in vrže bučo v Melihijada. Buča se razleti na velike, srednje in male kose, pri čemer je velikih kosov 10 %, srednjih 30 %, majhnih kosov pa je 60 %. Koščki buče se odbijejo nazaj proti Pipiju. Ob zadetku veliki kos prevrne Pipija z verjetnostjo 0,9, srednji kos ga prevrne z verjetnostjo 0,2, majhni kos pa z verjetnostjo 0,05.

a. (10) Pipija zadane natanko en kos buče in nesrečni Pipi se zvrne s stola. Kolikšna je verjetnost, da ga je prevrnil srednje velik kos buče? [1]

b. (10) Določite še verjetnost dogodka, da se je Pipi uspel obdržati na stolu pri pogoju da sta v Pipija priletela dva kosa buče, od katerih je bil eden zagotovo velik.

[1] V poskusu ni bila poškodovana nobena žival. Oba sta srečno odpujsala domov.

3. (20) V posodi je b belih, r rdečih in m modrih kroglic. Dva igralca izmenično izbirata kroglico, ki jo nato vrneta v posodo. Zmaga tisti, ki prvi potegne belo kroglico. Z X označimo število potegov do zmage kateregakoli igralca.

a. (10) Navedite $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

b. (10) Izračunajte verjetnost, da zmaga prvi igralec na potezi.

4. (20) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja z

$$G(s) = G_{Z_1}(s) = 1 - \log(2 - e^{s-1}) \,.$$

a. (10) Izračunajte $P(Z_3 = 0)$.

b. (10) Z matematično indukcijo dokažite, da velja

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana s tabelo:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{4}{45}$	$\frac{8}{45}$	$*$
2	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
3	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
4	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$

a. (10) Dopolnite tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni.

b. (10) Dopolnite tabelo tako, da bo veljalo $P(X = 3, Y = k) = \frac{k}{45}$, $E(X|Y = 3) = \frac{21}{10}$ in $E(X|Y = 4) = \frac{24}{11}$.

6. (20) Recimo, da imate namen n-krat igrati ruleto v HIT-u. Izberete si lahko dve različni strategiji:

- Vedno stavite 1 EURO na številko. Če dobite, vam povrnejo stavo in izplačajo dodatnih 35 EURO. Če ne dobite, ste izgubili tudi stavo. Verjetnost, da dobite, je $1/37$.
- Vedno stavite 1 EURO na rdeče. Če dobite, vam povrnejo stavo in izplačajo dodaten 1 EURO. Če ne dobite, ste izgubili tudi stavo. Verjetnost, da dobite, je $18/37$.

a. (10) Za obe strategiji izračunajte verjetnost, da po $n = 10.000$ igrah rulete nimate izgube.

b. (10) Izračun v a. pokaže, da je s prvo strategijo verjetnost, da ne bomo na izgubi, večja kot pri drugi strategiji. Vendar ima vsaka stvar svojo ceno. Izračunajte verjetnost, da bo vaša izguba po $n = 10.000$ igrah 500 EURO ali več za obe strategiji. Na kratko komentirajte.