FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Pisni izpit

26. junij 2003

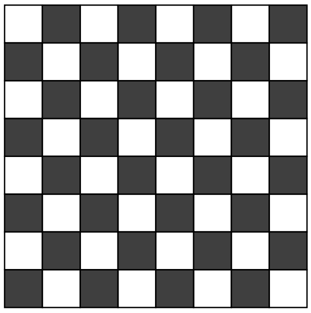
Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, na razpolago pa imate 120 minut.

Naloga	a.	b.	
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Predpostavite, da se trdnjava na šahovnici na sliki lahko giblje samo po eno polje v desno ali po eno polje navzgor. Trdnjava začne v levem spodnjem kotu.



a. (10) Na koliko načino lahko trdnjava pride iz spodnjega levega kota v zgornji desni kot, če se lahko, kot rečeno, vsakič premakne le za eno polje v desno ali eno polje navzgor?

Rešitev: V vsakem primeru bo korakov $2n$, kjer je $n = 7$. Med temi $2n$ koraki jih mora biti n v desno in n navzgor. Kdaj gremo desno in kdaj navzgor lahko poljubno izbiramo, zato je možnih poti $\binom{2n}{n}$.

b. (10) Privzemite, da se trdnjava lahko giblje samo v desno ali navzgor, vendar s poljubno velikimi koraki (ne samo vsakič za eno polje). Na vsakem koraku se mora trdnjava premakniti za vsaj eno polje. Na koliko načinov lahko pride iz spodnjega levega v zgornji deni kot?

Namig: Računajte najprej za k premikov v desno in l v levo, kjer je $1 \le k \le 7$ in $1 \le l \le 7$.

Rešitev: Recimo, da bo k korakov v desno velikosti $a_1, \ldots, a_k$ in l korakov navzgor velikosti $b_1, \ldots, b_l$. Veljati mora $a_1 + \cdots + a_k = 7$ in $b_1 + \cdots + b_l = 7$. Število 7 lahko napišemo kot vsoto k pozitivnih celih števil na $\binom{6}{k-1}$ načinov. Podobno lahko napišemo 8 kot vsoto l celih števil na $\binom{6}{l-1}$ načinov. Po osnovnem izreku kombinatorike lahko pridemo iz spodnjega levega v zgornji deni kot z k koraki v desno in l koraki navzgor na

$$\binom{k+l}{l}\binom{6}{k-1}\binom{6}{l-1} = \frac{(k+l)!}{k! \cdot l!} \cdot \frac{(6!)^2}{(7-k)! \cdot (7-l)! \cdot (k-1)! \cdot (l-1)!}.$$

načinov. Število vseh načinov je

$$\sum_{k=1,l=1}^{7} \binom{k+l}{l}\binom{6}{k-1}\binom{6}{l-1}.$$

2. (20) V zgornjem predalu Borutove omare se nahajo tri bele, štiri modre in pet črnih nogavic, v spodnjem pa šest belih, deset modrih in osem črnih nogavic.

a. (10) Zjutraj še v temi mora Borut iz poljubnega predala izvleči dve nogavici. Seveda upa, da bosta enake barve. Kateri predal si bo izbral? Odgovor utemelji.

Rešitev: Verjetnost, da Borut izvleče 2 enaki nogavici iz zgornjega predala je enaka

$$P(Z) = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{38}{132} = 0,29\,,$$

verjetnost, da Borut potegne 2 enaki nogavici iz spodnjega predala pa je

$$P(S) = \frac{6}{24} \cdot \frac{5}{23} + \frac{10}{24} \cdot \frac{9}{23} + \frac{8}{24} \cdot \frac{7}{23} = \frac{176}{552} = 0,32\,.$$

Zato bo Borut izbiral iz spodnjega predala, saj tam izbere dve nogavici enake barve z večjo verjetnostjo.

b. (10) Nekdo je Borutu prejšnji večer prestavil iz zgornjega v spodnji predal eno nogavico. Borut zjutraj potegne iz spodnjega predala črno nogavico. Kolikšna je verjetnost, da je bila tudi prestavljena nogavica črna?

Rešitev: Označimo z A dogodek, da je Borut povlekel iz spodnjega predala črno nogavico in s C dogodek, da je bila prestavljena nogavica črne barve.

Računamo po Bayesovi formuli

$$\begin{aligned} P(C|A) &= \frac{P(A)P(A|C)}{P(A)P(A|C) + P(A^C)P(A^C|C)} = \\ &= \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{9}{25}}{\frac{5}{12} \cdot \frac{9}{25} + \frac{7}{12} \cdot \frac{8}{25}} = \\ &= \frac{45}{101} \end{aligned}$$

3. (20) V bobnu se nahaja n rdečih, n zelenih in n belih kroglic, $n \in \mathbb{N}$. Na slepo iz dobro premešanega bobna izberemo $2n$ kroglic. Pri tem nam naj slučajne spremenljivke X, Z in T zaporedoma povejo število rdečih, zelenih in belih kroglic v našem izboru.

a. (10) Določite $P(Z = X + Y)$.

Rešitev: Opazimo, da je $Z \sim \mathrm{HiperGeom}(2n, n, 3n)$. *Naloga sprašuje po verjetnosti*

$$P(Z = X + Y = n) = \frac{\binom{n}{n}\binom{2n}{n}}{\binom{3n}{2n}} = \frac{((2n)!)^2}{n!(3n)!}\,.$$

b. (10) Določite porazdelitve slučajnih spremenljivk X, Z in T ter njihova upanja.

Rešitev: Spremenljivke X*,* Z *in* T *so enako porazdeljene in velja* $X \sim Z \sim T \sim \mathrm{HiperGeom}(2n, n, 3n)$. *Upanje teh slučajnih spremenljivk je tako enako* $E(X) = E(Z) = E(T) = 2n \cdot \frac{n}{3n} = \frac{2n}{3}$.

4. (20) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ zaporedje nenegativnih slučajnih spremenljivk, kjer velja $E(Z_0) = 1$. Naj bo

$$G_{Z_n}(s) = G_{Z_{n-1}}(1 - p + ps^2)\,,$$

kjer je $p \in (0, 1)$.

a. (10) Pokažite, da je $E(Z_n) = 2^n p^n$ za vsako naravno število n.

Namig: Vemo, da je $E(X) = \lim_{s\uparrow 1} G'_X(s)$.

Rešitev: Dano enakost odvajamo in dobimo

$$G'_{Z_n}(s) = 2psG'_{Z_{n-1}}(1 - p + ps^2)\,.$$

Vstavimo $s = 1$ *in sledi*

$$E(Z_n) = 2pE(Z_{n-1}) = \ldots = 2^n p^n\,.$$

b. (10) Pokažite, da za $n \in \mathbb{N}$ velja zveza $E(Z_n^2) = 2^{n+1}p^n(1 - p) + 4p^2 E(Z_{n-1}^2)$.

Rešitev: Dvakrat odvajamo dano enakost in dobimo

$$G''_{Z_n}(s) = 2pG'_{Z_{n-1}}(1 - p + ps^2) + 4p^2 s^2 G'_{Z_{n-1}}(1 - p + ps^2)\,.$$

Pošljemo s k 1 in dobimo

$$E(Z_n(Z_n - 1)) = 2pE(Z_{n-1}(Z_{n-1} - 1)) + 4p^2 E(Z_{n-1})\,.$$

Po preureditvi in upoštevanju a. dela sledi

$$E(Z_n^2) = 2^{n+1}p^n(1 - p) + 4p^2 E(Z_{n-1}^2)\,.$$

5. (20) Naj bo $n > 1$ dano naravno število. Slučajni spremenljivki X in Y imata porazdelitev dano z

$$P(X=k, Y=l) = \frac{1}{n(n-k)}$$

za $1 \leq k < n$ in $l \leq n-k$ in

$$P(X=n, Y=0) = \frac{1}{n}.$$

a. (10) Izračunajte $E(Y|X=k)$ za $k < n$.

Rešitev: Potrebujemo verjetnost $P(X=k)$. Računamo

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{l=1}^{n-k} P(X=k, Y=l) \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} \frac{1}{n(n-k)} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Po definiciji je

$$\begin{aligned} E(Y|X=k) &= \sum_{l=1}^{n-k} l\, P(Y=l|X=k) \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} l\, \frac{P(X=k, Y=l)}{P(X=k)} \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} \frac{l}{n-k} \\ &= \frac{1}{n-k} \cdot \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} \\ &= \frac{n-k+1}{2}. \end{aligned}$$

Torej

$$E(Y|X=k) = \frac{n-k+1}{2}.$$

b. (10) Izračunajte še $E(Y|X=0)$ in $E(Y)$.

Rešitev: Po definiciji je $E(Y|X=0)=0$. *Vemo, da je*

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} E(Y|X=k)P(X=k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k+1}{2} \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{m=2}^{n} m \\ &= \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right) \\ &= \frac{n^2-n-2}{2n}\,. \end{aligned}$$

6. (20) Recimo, da imate namen n-krat igrati ruleto v HIT-u. Izberete si lahko dve različni strategiji:

- Vedno stavite 1 EURO na številko. Če dobite, vam povrnejo stavo in izplačajo dodatnih 35 EURO. Če ne dobite, ste izgubili tudi stavo. Verjetnost, da dobite, je 1/37.
- Vedno stavite 1 EURO na rdeče. Če dobite, vam povrnejo stavo in izplačajo dodaten 1 EURO. Če ne dobite, ste izgubili tudi stavo. Verjetnost, da dobite, je 18/37.

a. (10) Za obe strategiji izračunajte verjetnost, da po $n = 10.000$ igrah rulete nimate izgube.

Rešitev: Uporabimo centralni limitni izrek. Za prvo strategijo je $\mu = -1/37 = -0,027$ *in* $\sigma = 36 * \sqrt{(1/37)(36/37)} = 5,84$. *Računamo*

$$\begin{aligned} P(S_n \geq 0) &= P(S_n - n\mu \geq -n\mu) \\ &= P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \geq -\frac{n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) \\ &\approx P(Z \geq \frac{n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}) \\ &= P(Z \geq 0.46) \\ &= 0.32\,. \end{aligned}$$

Za drugo strategijo je $\mu = -1/37$ *in* $\sigma = 2\sqrt{(18/37)(19/37)}$. *Računamo*

$$\begin{aligned} P(S_n \geq 0) &= P(S_n - n\mu \geq -n\mu) \\ &= P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \geq -\frac{n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) \\ &\approx P(Z \geq \frac{n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}) \\ &= P(Z \geq 2,70) \\ &= 0.003\,. \end{aligned}$$

b. (10) Izračun v a. pokaže, da je s prvo strategijo verjetnost, da ne bomo na izgubi, večja kot pri drugi strategiji. Vendar ima vsaka stvar svojo ceno. Izračunajte verjetnost, da bo vaša izguba po $n = 10.000$ igrah 500 EURO ali več za obe strategiji. Na kratko komentirajte.

Rešitev: Računamo $P(S_n \leq -500)$. *Za prvo strategijo dobimo*

$$\begin{aligned} P(S_n \leq -500) &= P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq \frac{-500 - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) \\ &\approx P(Z \leq -0,39) \\ &= 0,35\,. \end{aligned}$$

Podobno izračunamo za drugo strategijo, da je

$$\begin{aligned} P(S_n \leq -500) &= P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq \frac{-500 - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) \\ &\approx P(Z \leq -2,30) \\ &= 0,010\,. \end{aligned}$$

Komentar: S prvo strategijo je verjetnost, da ne bomo imeli izgube res večja, vendar je cena za to tudi občutno večja verjetnost za visoke izgube.