FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

STATISTIKA

PISNI IZPIT

15. JUNIJ 2005

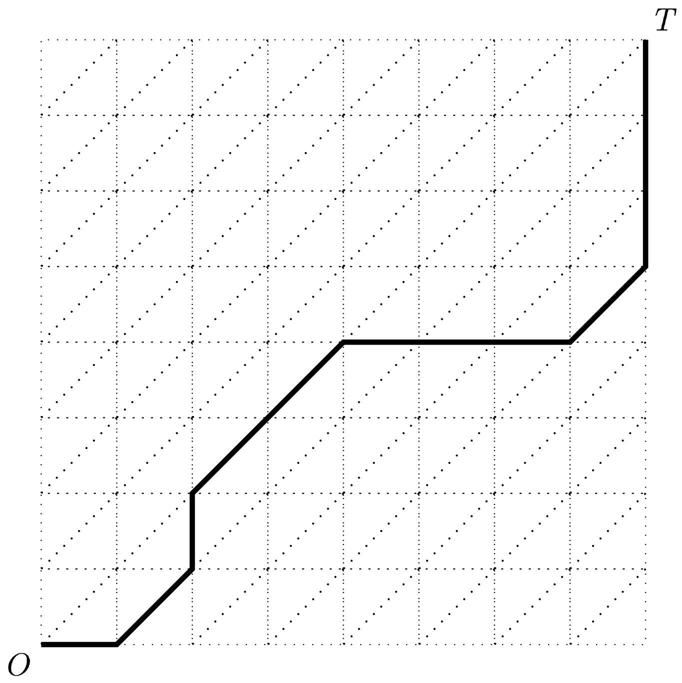
IME IN PRIIMEK: ______________________ VPISNA ŠT: | | | | | | | | |

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, na razpolago pa imate 120 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Mesto A ima obliko kvadrata in je razdeljeno na n vzporednih in n navpičnih ulic, poleg tega pa je v vsakem od kvadratkov še ulica, ki poteka diagonalno, kot na Sliki 1.



Slika 1 Mesto A s svojimi ulicami. Na sliki je primer možne poti iz točke O v točko T.

a. (10) V mestu A želimo priti iz točke O na spodnjem levem oglišču v točko T na zgornjem desnem oglišču. Na vsakem koraku lahko gremo desno ali gor ali pa po diagonali desno gor. Koliko je možnih poti iz O v A, ki vsebujejo natanko k diagonal, za $k = 0, 1, 2, \ldots, n$?

   Namig: Preštejte, kolikšno je skupno število ulic, po katerih boste šli.

b. (10) Koliko je poti, pri katerih gremo po natanko m ulicah, za $m = n, n+1, \ldots, 2n$?

2. (20) V prvi posodi se nahajo tri bele, štiri modre in pet črnih kroglic, v drugi pa šest belih, deset modrih in osem črnih kroglic.

a. (10) Za katero posodo je verjetnost, da potegnemo dve enaki kroglici, večja?

b. (10) Iz druge posode na slepo prestavimo neko kroglico v prvo posodo. Nato iz prve posode naključno izvlečemo kroglico ter opazimo, da je črne barve. Kolikšna je verjetnost, da je bila tudi prestavljena kroglica črne barve?

3. (20) Daniel Bernoulli je leta 1768 zastavil naslednji problem: Imamo $2n$ zakonskih parov in naj bo $m \leq 2n$ dano naravno število. Privzemite, da Bog naključno izbere m izmed $2n$ ljudi in jih pokliče k sebi (to je znano tudi kot to, da izbranih m ljudi umre). Naj bo X slučajno število še živečih parov.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

   Namig: Indikatorji.

b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

4. (20) Kot znano upoštevajte, da je

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

za $|x| < 1$.

a. (10) Naj za slučajno spremenljivko X velja

$$P(X = k) = \frac{(1-p)^k}{k \log(1/p)}$$

   za $k = 1, 2, \ldots$ in $p \in (0, 1)$. Izračunajte rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X.

b. (10) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne spremenljivke z enako porazdelitvijo kot spremenljivka X iz a. Naj bo N od njih neodvisna slučajna spremenljivka s Poissonovo porazdelitvijo s parametrom $\lambda = -m \log p$ za neko celo število $m \geq 1$. Izračunajte $P(Y = k)$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$. Kot znano upoštevajte Newtonovo formulo

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

   za $|x| < 1$.

5. (20) Slučajne spremenljivke X, Y in Z naj imajo porazdelitev

$$P(X = i, Y = j, Z = k) = \frac{(a)_{i+j+k}(b)_{3-i-j-k}}{c(c+1)(c+2)},$$

kjer so a,b in c pozitivna števila, $i, j, k \in \{0, 1\}$ in velja definicija

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_1 = \alpha \quad \text{in} \quad (\alpha)_m = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1) \quad \text{za } m \geq 1.$$

a. (10) Poiščite porazdelitev spremenljivk X in Y.

b. (10) Izračunajte $P(Z|X + Y = 1)$.

6. (20) Dva strastna igralca na srečo igrata ruleto v neskončnost. Ruletni cilinder ima 37 izsekov, od katerih je 18 rdečih, 18 črnih in 1 zelen. Prvi igralec vedno stavi \$1 na rdeče, drugi pa vedno stavi \$1 na številko 17, ki je črna. Čisti dobiček po eni igri je v primeru zmage za prvega \$1, za drugega pa \$35, v nasprotnem primeru pa oba izgubita stavo.

a. (10) Aproksimirajte verjetnost, da drugi igralec po 1000 igrah nima izgube.

b. (10) Označite z X_n čisti profit prvega igralca po n igrah, z Y_n pa profit drugega igralca po n igrah. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n > X_n) = \lim_{n\to\infty} P(Y_n - X_n > 0).$$

Utemeljite vaš razmislek.

Namigi: Napišite $Y_n - X_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k - V_k)$, *kjer je* U_k *čisti profit prvega igralca v* k*-ti igri in* V_k *čisti profit drugega igralca v isti igri. Slučajne spremenljivke* $U_k - V_k$ *so med sabo neodvisne z enako porazdelitvijo in* $\text{var}(U_k - V_k) = 1368/37$.