FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

# STATISTIKA

PISNI IZPIT

27. JUNIJ 2005

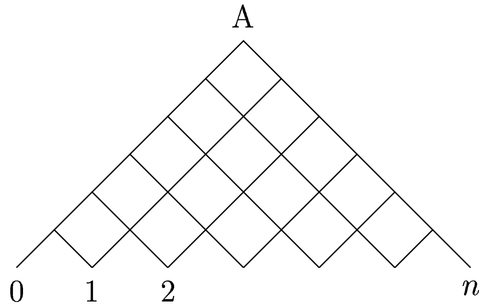
IME IN PRIIMEK: ____________________ VPISNA ŠT: | | | | | | | | |

## NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, na razpolago pa imate 120 minut.

| Naloga | a. | b. | c. | d. | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | | | • | • | |
| 2. | | | • | • | |
| 3. | | | • | • | |
| 4. | | | • | • | |
| 5. | | | • | • | |
| 6. | | | • | • | |
| Skupaj | | | | | |

**1.** (20) Mesto T ima ulice v obliki trikotnika kot na sliki 1a. Hiše na spodnji strani trikotnika imajo številke $0, 1, 2, \ldots, n$. Avtobusna postaja je v točki A.

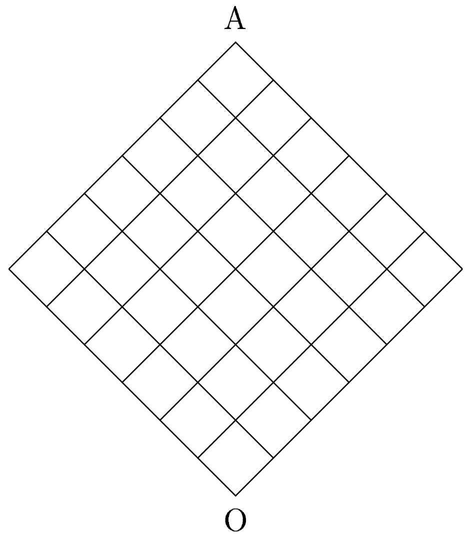



Slika 1a Tloris mesta T

a. (10) Na koliko načinov lahko pridemo z avtobusne postaje A do hiše s števiko $k$ tako, da gremo vsakič le levo ali desno in se nikoli ne vračamo proti avtobusni postaji?

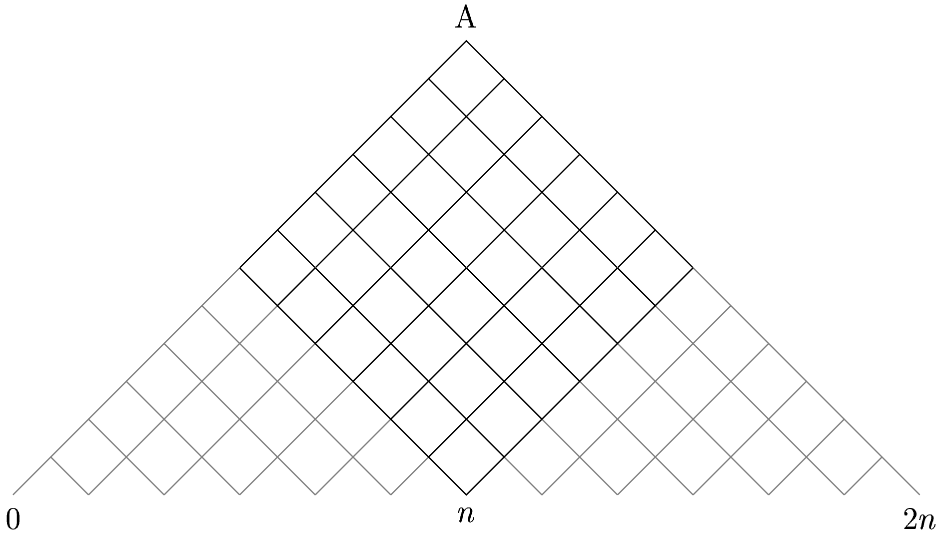
   *Namig: Razmislite, kolikokrat morate iti na levo, da pridete do hiše s števiko $k$.*

b. (10) Mesto K ima obliko kvadrata kot na sliki 1b. Avtobusna postaja je v točki A, profesor pa stanuje v hiši O. Vzporednih ulic je $n + 1$. Na koliko načinov lahko profesor pride z avtobusne postaje do svoje hiše tako, da gre vedno le levo ali desno in se nikoli ne vrača proti avtobusni postaji?




Slika 1b Tloris mesta K

   *Namig: V mislih dogradite mesto do trikotnega mesta kot na sliki 1c. V dograjenem mestu ima profesorjeva hiša hišno številko $n$ od številk $0, 1, \ldots, 2n$.*




Slika 1c Mesto K dograjeno v trikotnik

**2.** (25) Janez pošilja Katarini kodirana sporočilca v obliki črt in pik. Na poti se spremeni v črtico $\frac{2}{5}$ oddanih pik in se spremeni v piko $\frac{1}{3}$ oddanih črt. V zadnjem sporočilu je Janez oddal $62,5\%$ pik.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da je prvi znak v prejetem sporočilu črta?

b. (10) Katarina je kot prvi znak prejela piko. Kolikšna je verjetnost, da je Janez piko tudi oddal?

**3.** (20) V nekem bloku živi $n$ poročenih parov. V času zimskih obolenj naključno zboli $m$ ljudi tega bloka ne glede na starost ali spol, pri čemer je $m \leq 2n$.

a. (10) V bloku živita tudi zakonca Zupan. Določi verjetnost, da sta oba zakonca zdrava.

b. (10) Z $X$ označimo slučajno spremenljivko, ki nam pove število parov, v katerih sta obe osebi zdravi. Določi matematično upanje slučajne spremenljivke $X$.

   *Namig: Indikatorji.*

**4.** (20) Naj bodo $X$, $Y$ in $Z$ med sabo neodvisne slučajne spremenljivke z $X \sim \text{Geom}(1/2)$, $Y \sim \text{Geom}(1/3)$ in $Z \sim \text{Geom}(1/4)$.

a. (10) Izračunajte rodovno funkcijo vsote $W = X + Y + Z$.

b. (10) Pokažite, da je

$$G_W(s) = \frac{s^3}{4(1-s/2)} - \frac{4s^3}{3(1-2s/3)} + \frac{9s^3}{8(1-3s/4)}$$

in dokažite, da je za $k = 0, 1, \ldots$

$$P(W = k+3) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{9}{8}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^k .$$

*Namig: Za* $|x| < 1$ *je*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k .$$

**5.** (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk $X$ in $Y$ je dana s tabelo:

| $Y\backslash X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{4}{45}$ | $\frac{8}{45}$ | $*$ |
| 2 | $\frac{2}{45}$ | $*$ | $*$ |
| 3 | $\frac{2}{45}$ | $*$ | $*$ |
| 4 | $\frac{2}{45}$ | $*$ | $*$ |

a. (10) Dopolnite tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki $X$ in $Y$ neodvisni.

b. (10) Neodvisno od a. dela naloge dopolnite tabelo tako, da bo veljalo $P(X = 3, Y = k) = \frac{k}{45}$, $E(X|Y = 3) = \frac{21}{10}$ in $E(X|Y = 4) = \frac{24}{11}$.

**6.** (20) Čarovnik ima dve škatli: prvo s povprečjem 1 in standardnim odklonom 10, drugo pa s povprečjem -1 in standardnim odklonom 10. Ponuja nam naslednjo igro na srečo: naskrivaj bo izbral eno izmed škatel, vsako z verjetnostjo 1/2. Nato bo iz izbrane škatle izbral $n = 100$ listkov s ponavljanjem in nam povedal vsoto. Če prav uganemo, katero škatlo je izbral, dobimo nagrado. Odločimo se, da bomo uganjevali na naslednji način: če je vsota pozitivna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem 1, če pa bo vsota negativna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem -1.

a. (10) Recimo, da čarovnik izbere škatlo s povprečjem 1, vendar vam tega ne pove. Kolikšna približno je verjetnost, da boste prav uganili na podlagi vsote števil na 100 naključno izbranih lističih.

   *Namig: Računate* $P(S_{100} > 0)$.

b. (10) Recimo spet, da je čarovnik izbral škatlo s povprečjem 1. Kolikokrat bi moral izbirati lističe in nam povedati vsoto, da bi uganili prav z verjetnostjo približno $0,99$?