FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Pisni izpit

19. junij 2006

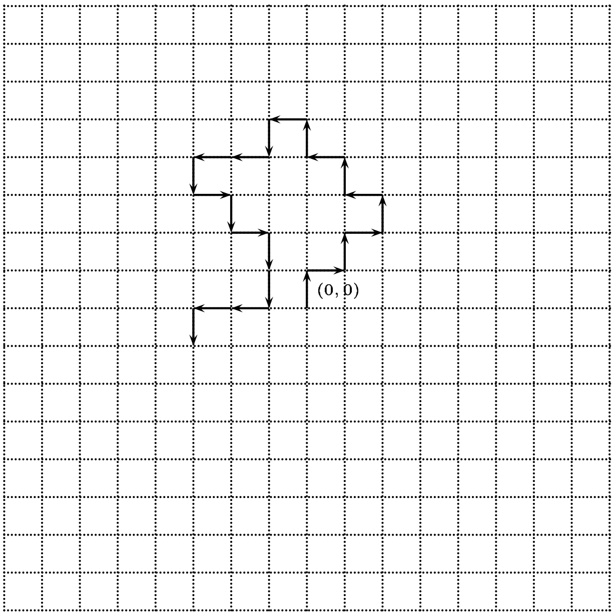
Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, na razpolago pa imate 120 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.					
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (50) Sprehod po celoštevilski mreži je pot, ki se začne v $(0,0)$, na vsakem koraku pa lahko gremo za enoto na desno, levo, gor ali dol. Primer take poti je na sliki 1a.



Slika 1a Primer sprehoda po $\mathbb{Z}^2$.

a. (5) Koliko je vseh sprehodov po $\mathbb{Z}^2$, ki imajo natanko n korakov?

Rešitev: Na vsakem koraku imamo 4 možnosti, kam lahko zavijemo. V n korakih se po osnovnem izreku kombinatorike "nabere" 4^n možnosti.

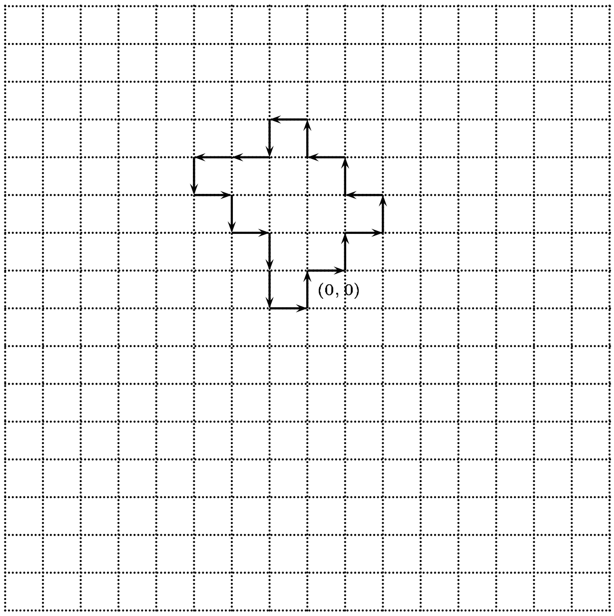
b. (5) Koliko je sprehodov z natanko n koraki, ki gredo k_1-krat desno, k_2-krat levo, k_3-krat gor in k_4-krat dol? Pri tem je seveda $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = n$ in $k_i \geq 0$ za $i = 1, 2, 3, 4$.

Rešitev: Med n koraki najprej izberemo tiste, ko gremo desno. To lahko naredimo na $\binom{n}{k_1}$ načinov. Med preostalimi $n - k_1$ koraki izberemo tiste, ko gremo levo. To lahko naredimo na $\binom{n-k_1}{k_2}$ načinov. Med preostalimi $n - k_1 - k_2$ koraki lahko izberemo tiste, ko gremo gor na $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ načinov. Na preostalih korakih gremo dol. Po osnovnem izreku kombinatorike je vseh načinov

$$\binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \binom{n-k_1-k_2}{k_3} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_3! \cdot k_2! \cdot k_4!}\,.$$

c. (5) Na sliki 1b je sprehod dolžine $2n$, ki se začne in konča v točki $(0,0)$. Pokažite, da je sprehodov, ki se začno in končajo v točki $(0,0)$, in gredo natanko $2k$-krat "levo" ali "desno", natanko $(2n-2k)$-krat pa "gor" ali "dol" točno

$$\binom{2n}{n}\binom{n}{k}^2 .$$



Slika 1b Primer sprehoda po $\mathbb{Z}^2$, ki se začne in konča v $(0,0)$.

Rešitev: Ker se sprehod konča v točki $(0,0)$*, moramo iti enako mnogokrat "levo" in "desno" , torej* k*-krat levo in* k*-krat desno. Po istem razmisleku moramo iti* $(n-k)$*-krat gor in* $(n-k)$*-krat dol. Z upoštevanjem dela b, naloge dobimo, da je takih sprehodov*

$$\left(\frac{(2n)!}{(k!)^2\cdot((n-k)!)^2}\right).$$

d. (10) Kot znano upoštevajte, da je

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

Pokažite, da je vseh sprehodov z natanko $2n$ koraki, ki se začno in končajo v točki $(0,0)$, natanko

$$\binom{2n}{n}^2 .$$

Namig: Uporabite c., tudi če ne znate dokazati!

Rešitev: Po c. delu naloge, je odgovor na vprašanje vsota

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n} \binom{n}{k}^2 .$$

Z upoštevanjem dane vsote odgovor sledi.

2. (20) V prvi posodi imamo n belih, v drugi pa n črnih kroglic. Naključno izberemo eno od posod in kroglico iz nje prestavimo v drugo posodo. Verjetnost izbire posamezne posode je $1/2$. Postopek ponovimo dvakrat. Privzemite, da je $n > 2$.

a. (10) Izračunajte verjetnost, da bo po dveh izbiranjih stanje enako kot na začetku, torej da bo v eni posodi n belih, v drugi pa n črnih kroglic.

   Rešitev: Označimo z A dogodek, katerega verjetnost iščemo. Dogodek se lahko zgodi na dva načina: izberemo prvo posodo, nato drugo in iz nje izberemo belo kroglico, izberemo drugo posodbo, nato prvo in iz nje črno kroglico. Sledi

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\,.$$

b. (10) Naj bo A dogodek, da je stanje na koncu enako kot na začetku. Izračunajte pogojno verjetnost dogodka, da smo dvakrat prestavljali belo kroglico, pogojno na dogodek A.

   Rešitev: Zaradi simetrije je pogojna verjetnost enaka $1/2$.

3. (20) Imamo r škatlic, v katere mečemo n kroglic. Meti so neodvisni, v vsakem poskusu pa zadenemo vsako škatlo z enako verjetnostjo $1/r$. Naj bo X število praznih škatlic po vseh n metih.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: Definiramo

$$I_k = \begin{cases} 1\,, & \textit{če je } k\textit{-ta škatla prazna} \\ 0\,, & \textit{če je } k\textit{-ta škatla polna} \end{cases}$$

Velja

$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n\,.$$

Za vsak k je

$$E(I_k) = P(I_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n\,.$$

Sledi

$$E(X) = E(I_1) + \cdots + E(I_n) = n\left(1 - \frac{1}{r}\right)^n\,.$$

b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

Rešitev: Za izračun variance potrebujemo vse kovariance $\mathrm{cov}(I_k, I_l)$. *Zaradi simetrije so kovariance enake. Računamo za $k \neq l$*

$$\mathrm{cov}(I_k, I_l) = P(I_k = 1, I_l = 1) - P(I_k = 1)P(I_l = 1)\,.$$

V vsakdanjem jeziku je

$$P(I_k = 1, I_l = 1) = P(\textit{škatli } k \textit{ in } l \textit{ sta prazni}) = \left(1 - \frac{2}{r}\right)^n\,.$$

Sledi

$$\mathrm{var}(X) = \frac{n}{r}\left(1 - \frac{1}{r}\right) + n(n-1)\left(\left(1 - \frac{2}{r}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{2n}\right)\,.$$

4. (20) Naj bo $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ proces razvejanja, za katerega velja

$$G(s) = G_{Z_1}(s) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}s^2 .$$

a. (10) Izračunajte verjetnost, da proces razvejanja izumre najkasneje v tretji generaciji. Bolj točno to pomeni, da iščemo verjetnost, da je že tretja generacija prazna.

Rešitev: Iskana verjetnost je $P(Z_3 = 0) = G_3(0)$. Računamo po vrsti

$$G_2(s) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot G(s)^2 = \frac{11}{27} + \frac{8}{27}\,s^2 + \frac{8}{27}\,s^4 .$$

Nadlajujemo

$$\begin{aligned} G_3(s) &= G_2(G(s)) \\ &= \frac{11}{27} + \frac{8}{27} \cdot G(s)^2 + \frac{8}{27} \cdot G(s)^4 \\ &= \frac{11}{27} + \frac{8}{27}\left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9}s^2 + \frac{4}{9}\right)^2 + \\ &+ \frac{8}{27}\left(\frac{1}{81} + \frac{8}{81}s^2 + \frac{24}{81}s^4 + \frac{32}{81}s^6 + \frac{16}{81}s^8\right) . \end{aligned}$$

Vstavimo $s = 0$ in sledi

$$G_3(0) = \frac{971}{2187} .$$

b. (10) Izračunajte

$$E\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{Z_n}\right) .$$

Namig: Upoštevajte, da je

$$E\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{Z_n}\right) = G_n\left(\frac{1}{2}\right) \quad in \quad G_n = G_{n-1} \circ G .$$

Rešitev: Opazimo, da je

$$E\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{Z_n}\right) = G_n\left(\frac{1}{2}\right) .$$

Vemo, da velja

$$G_n(s) = G_{n-1}(G(s))\,,$$

torej je

$$G_n\left(\frac{1}{2}\right) = G_{n-1}\left(G\left(\frac{1}{2}\right)\right)\,.$$

Ker je $G(1/2) = 1/2$, *je*

$$G_n\left(\frac{1}{2}\right) = G_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\,.$$

Veljalo bo torej

$$E\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{Z_n}\right) = E\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{Z_0}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

5. (20) Naj bo $n > 1$ dano naravno število. Slučajni spremenljivki X in Y imata porazdelitev dano z

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{n(n-k)}$$

za $1 \leq k < n$ in $l \leq n - k$ in

$$P(X = n, Y = 0) = \frac{1}{n}\,.$$

a. (10) Izračunajte $E(Y|X = k)$ za $k < n$.

Rešitev: Potrebujemo verjetnost $P(X = k)$. *Računamo*

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{l=1}^{n-k} P(X = k, Y = l) \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} \frac{1}{n(n-k)} \\ &= \frac{1}{n}\,. \end{aligned}$$

Po definiciji je

$$\begin{aligned} E(Y|X = k) &= \sum_{l=1}^{n-k} l\,P(Y = l|X = k) \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} l\,\frac{P(X = k, Y = l)}{P(X = k)} \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} \frac{l}{n-k} \\ &= \frac{1}{n-k} \cdot \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} \\ &= \frac{n-k+1}{2}\,. \end{aligned}$$

Torej

$$E(Y|X = k) = \frac{n-k+1}{2}\,.$$

b. (10) Izračunajte še $E(Y|X = n)$ in $E(Y)$.

Rešitev: Po definiciji je $E(Y|X=n)=0$. *Vemo, da je*

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E\big(E(Y|X)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} E(Y|X=k)P(X=k) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k+1}{2} \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{m=2}^{n} m \\
&= \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right) \\
&= \frac{n^2-n-2}{2n}\,.
\end{aligned}$$

6. (20) Znani angleški statistik M. G. Kendall v svojem obsežnem članku *The Random Character of Stock Market Prices* pravi:

> ... dnevno zaporedje cen delnic zgleda "blodeče", kot da bi nek škrat vsak dan naključno izbral število iz velike škatle, ki ima povprečje 0 in nek standardni odklon, in to izbrano število prištel ceni delnice prejšnega dne.

Predpostavite, da je povprečje škatle res 0, standardni odklon pa 1. Razlika cene delnice na začetku leta in na koncu leta je tako enaka vsoti 365 naključno izbranih števil iz te škatle.

a. (10) Recimo, da je bila cena delnice na začetku leta enaka 150 (v ustreznih enotah). Kolikšna je približno verjetnost, da bo na koncu vredna 160 ali več?

Rešitev: Potrebno je izračunati verjetnost, da bo vsota 365 naključno izbranih števil iz škatle enaka 10 alii več. Z uporabo centralnega limitnega izreka računamo

$$\begin{aligned} P(S_{365} \geq 10) &= P\left(\frac{S_{365}}{\sqrt{365}} \geq \frac{10}{\sqrt{365}}\right) \\ &\approx P(Z \geq 0,52) \\ &= 0,30\,. \end{aligned}$$

b. (10) Nekdo vam ponuja naslednjo stavo: če bo cena delnice na koncu leta 110 ali več, ti plačam 20 enot, če ne pa ti meni plačaš 5 enot. Na začetku leta je vrednost delnice 100. Kaj menite o tej stavi?

Namig: Kolikšen je vaš pričakovan dobiček?

Rešitev: Najprej izračunamo verjetnost, da bo vrednost delnice na koncu leta 110 *ali več. Podobno kot v a. računamo*

$$\begin{aligned} P(S_{365} \geq 10) &= P\left(\frac{S_{365}}{\sqrt{365}} \geq \frac{10}{\sqrt{365}}\right) \\ &\approx P(Z \geq 0,52) \\ &= 0,30\,. \end{aligned}$$

Torej bo naše izplačilo z verjetnostjo $0,3$ *e nako* 20*, z verjetnostjo* $0,7$ *pa* -5*. Pričakovano izplačilo je* $2,5$*. Stavo s pozitivnim pričakovanim izplačilom seveda vedno sprejmemo.*