FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Pisni izpit

30. junij 2006

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, na razpolago pa imate 120 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.					
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) V ravnini so dane točke A, B, C, D, E in F, od katerih nobena trojica ne leži na isti premici.

a. (5) Koliko različnih premic določajo te točke?

Rešitev: Ker so točke nekolinearne, vsak par točk določa drugo premico, zato $\binom{6}{2}=15$.

b. (5) Koliko različnih trikotnikov določajo te točke?

Rešitev: Ker so točke različne, vsaka trojica točk določa drug trikotnik, zato $\binom{6}{3}=20$.

c. (5) Koliko med temi trikotniki je takih, ki imajo točko C za oglišče?

Rešitev: Izmed preostalih petih točk moramo izbrati le še dve točki, torej $\binom{5}{2}=10$.

d. (5) Koliko je med temi trikotniki takšnih, ki imajo daljico AF za eno od stranic?

Rešitev: Vsaka od preostalih štirih točk nam podaja nov trikotnik.

2. (20) Abraham de Moivre v svoji "*The Doctrine of Chances (1756)*" kot nalogo 94 predlaga naslednje:

Igralci A,B,C igrajo isto igro na srečo po naslednjih pravilih: Najprej igrata dva od treh igralcev. Tisti, ki izgubi, preda svoje mesto tretjemu, ki je čakal in to pravilo velja v naslednjih igrah. Zmaga tisti, ki mu uspe premagati ostala dva v dveh zaporednih igrah. Predpostavljamo, da so igre med sabo neodvisne in je verjetnost za zmago kogarkoli v posamezni igri enaka 1/2.

a. (10) Predpostavite, da najprej igrata igralca A in B. Definirajte naslednje dogodke

- $C = \{\text{zmaga A}\}$.
- $A_1 = \{\text{A zmaga v prvi in drugi igri}\}$.
- $A_2 = \{\text{A zmaga v prvi igri in izgubi v drugi, C izgubi v tretji igri}\}$.
- $A_3 = \{\text{A izgubi v prvi igri, B izgubi v drugi igri}\}$.

Naj bo α verjetnost za zmago igralca A, če najprej igrata A in B, in β verjetnost za zmago A, če najprej igrata igralca A in C. Izrazite

$$P(C|A_i)$$

z α in β za vsak $i = 1, 2, 3$.

Rešitev: Očitno je $P(C|A_1) = 1$, ker je A že zmagal. Za $P(C|A_2)$ razmišljamo: v četrti igri igrata spet A in B. Ker ni še nihče zmagal, je situacija takšna, kot da bi začeli znova. Sledi $P(C|A_2) = \alpha$. Podobno razmišljamo za $P(C|A_3)$. Po prvih dveh igrah ni zmagal še nihče, zato začenjamo znova, le da tokrat najprej igrata igralca A in C. Sledi $P(C|A_3) = \beta$.

b. (10) Naj bo spet α verjetnost za zmago igralca A, če najprej igrata A in B, in β verjetnost za zmago A, če najprej igrata igralca A in C. Utemeljite zvezi

$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{8}\alpha$$

in

$$\beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{8}\beta$$

in izračunajte α.

Namig: $C \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Rešitev: Gre preprosto za formulo za popolno verjetnost, pri čemer opazimo, da je $C \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Za verjetnosti rešimo sistem enačb in dobimo $\alpha = \beta = 2/5$.

3. (20) V posodi naj bosta črna kroglica in kroglica z oznako 1. Na vsakem koraku iz posode naključno izberemo kroglico. Če ima izbrana kroglica oznako k, jo vrnemo in dodamo še eno kroglico z oznako k. Če je kroglica črna, jo vrnemo v posodo in dodamo kroglico z oznako $n+1$, kjer je n največja oznaka do tik pred izbiranjem.

Primer: Prvih nekaj korakov lahko izgleda kot

|l ‹| → |l ‹ ›| → |l ‹ › ‹| → |l ‹ › ‹ fi| →

|l ‹ › ‹ fi ‹| → |l ‹ › ‹ fi ‹ fl| → ⋯

a. (10) Naj bo X število različno označenih kroglic takrat, ko je po $(n-1)$-em izbiranju v posodi vključno s črno natanko $n+1$ kroglic. Črne kroglice ne štejemo. Izračunajte

$$P(\text{pri } k\text{-tem izbiranju smo izbrali črno kroglico})$$

za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ in potem $E(X)$.

Namig: Indikatorji.

Rešitev: Ko izbiramo k-tič, je v posodi $k+1$ kroglic, od katerih je ena črna in k označenih. Verjetnost, da bomo izbrali črno kroglico, je $1/(k+1)$. Definirajmo

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če } k\text{-tič izberemo črno kroglico} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Ker je $X = 1 + I_1 + \cdots + I_{n-1}$, je

$$E(X) = E(I_1) + \cdots + E(I_{n-1}) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}\,.$$

b. (10) Naj bo Y število kroglic z oznako 1 v posodi takrat, ko je po $(n-1)$-em izbiranju v posodi vključno s črno natanko $n+1$ kroglica. Izračunajte $P(Y = k)$ za $k = 1, 2, \ldots, n$.

Rešitev: Če želimo, da bo $Y = k$, moramo natanko $(k-1)$-krat izbrati kroglico z oznako 1. Kroglice z oznako 1 lahko izbiramo v različnih vrstnih redih, ki jih je $\binom{n-1}{k-1}$. Vse te disjunktne možnosti imajo isto verjetnost:

$$\frac{1}{2}\cdots\frac{2}{3}\cdots\frac{k-1}{k}\cdot\frac{1}{k+1}\cdot\frac{2}{k+2}\cdots\frac{(n-k)}{n}\,.$$

Sledi

$$P(X = k) = \binom{n-1}{k-1}\frac{(n-k)!\cdot(k-1)!}{n!} = \frac{1}{n}\,.$$

4. (20) Oglejte si naslednjo varianto procesa razvejanja: na začetku imamo eno celico. Po geometrijskem času s parametrom p se bo ta celica razdelila na dve neodvisno od ostalih celic. Vse celice se bodo potem delile naprej po enakem načelu. Označite število celic v trenutku n z Z_n in rodovno funkcijo slučajne spremenljivke Z_n z $G_n(s)$. Velja $G_0(s) = s$ in

$$G_{n+1}(s) = G_n\big(s(q+ps)\big)\,,$$

kjer je $q = 1 - p$.

a. (10) Pokažite, da je $E(Z_n) = (1+p)^n$.

Rešitev: Vemo, da je $E(Z_n) = G_n'(1)$. Odvajamo rekurzivno formulo na levi in na desni. Dobimo

$$G_{n+1}'(s) = G_n'\big(s(q+ps)\big)(q+2ps)\,.$$

Vstavimo $s = 1$ in sledi

$$E(Z_{n+1}) = E(Z_n)\cdot(1+p)\,.$$

Ker je $E(Z_0) = 1$, sledi, da je

$$E(Z_n) = (1+p)^n\,.$$

b. (10) Izračunajte $P(Z_3 = 8)$.

Rešitev: Računamo $G_1(s) = s(q+ps)$,

$$\begin{aligned} G_2(s) &= G_1(s(q+ps)) \\ &= s(q+ps)(q+ps(q+ps)) \\ &= s(q+ps)(q+pqs+p^2s^2) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} G_3(s) &= G_2(s(q+ps)) \\ &= s(q+ps)(q+ps(q+ps))(q+pqs(q+ps)+p^2s^2(q+ps)^2)\,. \end{aligned}$$

Izluščiti je potrebno koeficient pri potenci s^8. V vsakem oklepaju moramo izbrati koeficiente pri najvišji potenci in jih zmnožiti. Dobimo produkt $p\cdot p^2\cdot p^4 = p^7$. Sledi $P(Z_3 = 8) = p^7$.

5. (20) Naj bo $n > 1$ dano naravno število. Slučajni spremenljivki X in Y imata porazdelitev dano z

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{n(n-k)}$$

za $1 \le k < n$ in $l \le n - k$ in

$$P(X = n, Y = 0) = \frac{1}{n}.$$

a. (10) Izračunajte $E(Y|X = k)$ za $k < n$.

Rešitev: Potrebujemo verjetnost $P(X = k)$. Računamo

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{l=1}^{n-k} P(X = k, Y = l) \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} \frac{1}{n(n-k)} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Po definiciji je

$$\begin{aligned} E(Y|X = k) &= \sum_{l=1}^{n-k} l\, P(Y = l|X = k) \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} l\, \frac{P(X = k, Y = l)}{P(X = k)} \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} \frac{l}{n-k} \\ &= \frac{1}{n-k} \cdot \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} \\ &= \frac{n-k+1}{2}. \end{aligned}$$

Torej

$$E(Y|X = k) = \frac{n-k+1}{2}.$$

b. (10) Izračunajte še $E(Y|X = n)$ in $E(Y)$.

Rešitev: Po definiciji je $E(Y|X=n)=0$. *Vemo, da je*

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\big(E(Y|X)\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} E(Y|X=k)P(X=k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k+1}{2} \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{m=2}^{n} m \\ &= \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right) \\ &= \frac{n^2-n-2}{2n}\,. \end{aligned}$$

6. (20) Znani angleški statistik M. G. Kendall v svojem obsežnem članku *The Random Character of Stock Market Prices* pravi:

> ... dnevno zaporedje cen delnic zgleda "blodeče", kot da bi nek škrat vsak dan naključno izbral število iz velike škatle, ki ima povprečje 0 in nek standardni odklon, in to izbrano število prištel ceni delnice prejšnega dne.

Predpostavite, da je povprečje škatle res 0, standardni odklon pa 1. Razlika cene delnice na začetku leta in na koncu leta je tako enaka vsoti 365 naključno izbranih števil iz te škatle.

a. (10) Recimo, da je bila cena delnice na začetku leta enaka 150 (v ustreznih enotah). Kolikšna je približno verjetnost, da bo na koncu vredna 160 ali več?

Rešitev: Potrebno je izračunati verjetnost, da bo vsota 365 naključno izbranih števil iz škatle enaka 10 alii več. Z uporabo centralnega limitnega izreka računamo

$$
\begin{aligned}
P(S_{365} \geq 10) &= P\left(\frac{S_{365}}{\sqrt{365}} \geq \frac{10}{\sqrt{365}}\right) \\
&\approx P(Z \geq 0,52) \\
&= 0,30\,.
\end{aligned}
$$

b. (10) Nekdo vam ponuja naslednjo stavo: če bo cena delnice na koncu leta 110 ali več, ti plačam 20 enot, če ne pa ti meni plačaš 5 enot. Na začetku leta je vrednost delnice 100. Kaj menite o tej stavi?

Namig: Kolikšen je vaš pričakovan dobiček?

Rešitev: Najprej izračunamo verjetnost, da bo vrednost delnice na koncu leta 110 *ali več. Podobno kot v a. računamo*

$$
\begin{aligned}
P(S_{365} \geq 10) &= P\left(\frac{S_{365}}{\sqrt{365}} \geq \frac{10}{\sqrt{365}}\right) \\
&\approx P(Z \geq 0,52) \\
&= 0,30\,.
\end{aligned}
$$

Torej bo naše izplačilo z verjetnostjo $0,3$ *e nako* 20, *z verjetnostjo* $0,7$ *pa* -5. *Pričakovano izplačilo je* $2,5$. *Stavo s pozitivnim pričakovanim izplačilom seveda vedno sprejmemo.*