FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko in mehaniko

Verjetnostni račun in statistika

Pisni izpit

5. september 2000, 10h

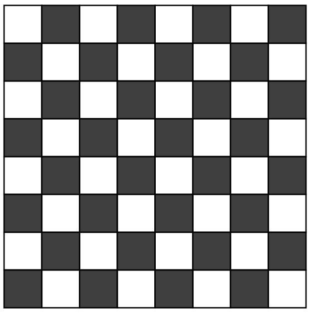
Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, na razpolago pa imate 120 minut.

Naloga	a.	b.	c.	
1.			•	
2.			•	
3.			•	
4.			•	
5.			•	
6.			•	
Skupaj				

1. (20) Na običajno šahovsko desko postavljamo figure.



a. (10) Na koliko načinov lahko razpostavimo 4 figure tako, da nobeni dve figuri nista v istem stolpcu ali v isti vrstici. Figur med seboj ne razlikujemo!

b. (10) Na koliko načinov lahko razpostavimo 4 figure tako, da bosta dve na črnih, dve pa na belih poljih. Figur med sabo ne razlikujemo!

2. (20) Abraham de Moivre v svoji "*The Doctrine of Chances (1756)*" kot nalogo 94 predlaga naslednje:

Igralci A,B,C igrajo isto igro na srečo po naslednjih pravilih: Najprej igrata dva od treh igralcev. Tisti, ki izgubi, preda svoje mesto tretjemu, ki je čakal in to pravilo velja v naslednjih igrah. Zmaga tisti, ki mu uspe premagati ostala dva v dveh zaporednih igrah. Predpostavljamo, da so igre med sabo neodvisne in je verjetnost za zmago kogarkoli v posamezni igri enaka 1/2.

a. (10) Predpostavite, da najprej igrata igralca A in B. Definirajte naslednje dogodke

- $C = \{\text{zmaga A}\}$.
- $A_1 = \{\text{A zmaga v prvi in drugi igri}\}$.
- $A_2 = \{\text{A zmaga v prvi igri in izgubi v drugi, C izgubi v tretji igri}\}$.
- $A_3 = \{\text{A izgubi v prvi igri, B izgubi v drugi igri}\}$.

Naj bo α verjetnost za zmago igralca A, če najprej igrata A in B, in β verjetnost za zmago A, če najprej igrata igralca A in C. Izrazite

$$P(C|A_i)$$

z α in β za vsak $i = 1, 2, 3, 4$.

b. (10) Naj bo spet α verjetnost za zmago igralca A, če najprej igrata A in B, in β verjetnost za zmago A, če najprej igrata igralca A in C. Utemeljite zvezi

$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{8}\alpha$$

in

$$\beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{8}\beta$$

in izračunajte α.

Namig: $C \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

3. (20) Kovanec mečemo, dokler ne pade vsaj en grb in vsaj ena številka. Označimo število potrebnih metov z X. Meti so med sabo neodvisni in verjetnost za grb v vsakem metu je p.

a. (10) Poiščite $P(X = k)$ za $k = 2, 3, \ldots$.

b. (10) Izračunajte $E(X)$.

Namig: Če je $Y \sim \mathrm{Geom}(\rho)$, *je* $E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\rho)^{k-1}\rho = 1/\rho$.

4. (20) Naj bosta Y in N nenegativni, celoštevilski slučajni spremenljivki z rodovnima funkcijama $G(s) = E(s^Y)$ in $H(s) = E(s^N)$. Predpostavite, da velja

$$H(s) = G(0)s + G(H(s)) - G(0)\,.$$

Označite $\mu = E(Y)$ in $\nu = E(N)$. Predpostavite $\mu = E(Y) < 1$.

a. (10) Pokažite, da je

$$\nu = \frac{G(0)}{1-\mu}\,.$$

Namig: Odvajajte.

b. (10) Pokažite še, da je

$$\mathrm{var}(N) = \frac{\nu^2 \mathrm{var}(Y)}{1-\mu} - \nu^2(1+\mu) + \nu\,.$$

Namig: Odvajajte še enkrat.

5. (20) Porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) je podana s tabelo:

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = -1$	0,1	0,2	0
$X = 0$	0	0,1	0,2
$X = 1$	0,3	0	0,1

a. (5) Sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni?

b. (15) Izračunajte $E\big(X(X+Y) \mid X\big)$.

6. (20) Dva strastna igralca na srečo igrata ruleto v neskončnost. Ruletni cilinder ima 37 izsekov, od katerih je 18 rdečih, 18 črnih in 1 zelen. Prvi igralec vedno stavi \$1 na rdeče, drugi pa vedno stavi \$1 na številko 17, ki je črna. Čisti dobiček po eni igri je v primeru zmage za prvega \$1, za drugega pa \$35, v nasprotnem primeru pa oba izgubita stavo.

a. (10) Aproksimirajte verjetnost, da drugi igralec po 1000 igrah nima izgube.

b. (10) Označite z X_n čisti profit prvega igralca po n igrah, z Y_n pa profit drugega igralca po n igrah. Izračunajte

$$\lim_{n \to \infty} P(Y_n > X_n) .$$

Utemeljite vaš razmislek.

Namigi: Napišite $Y_n - X_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k - V_k)$, *kjer je* U_k *čisti profit prvega igralca v* k*-ti igri in* V_k *čisti profit drugega igralca v isti igri. Slučajne spremenljivke* $U_k - V_k$ *so med sabo neodvisne z enako porazdelitvijo in* $\mathrm{var}(U_k - V_k) = 1368/37$.