FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Pisni izpit

17. september 2002

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, na razpolago pa imate 120 minut.

Naloga	a.	b.	
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Mož želi ženi ob obletnici kupiti posebej pripravljeno bonbonjero petdesetih čokoladnih bonbonov. Izbira lahko med orehovimi, lešnikovimi in mandljevimi bonboni.

a. (10) Na koliko različnih načinov lahko prodajalka pripravi bonbonjero?

b. (10) Recimo, da si mož želi, da bi bilo v bonbonjeri vsaj po 10 bonbonov vsake vrste. Na koliko načinov mu prodajalka lahko sedaj sestavi darilo?

2. (20) Na mizi imamo dve posodi. V prvi posodi je 5 belih, 2 rumeni in 3 črne kroglic, v drugi posodi pa 8 belih, ena rumena in ena črna kroglica. Vržemo pošteno igralno kocko. Če na kocki pade 1 ali 2, sežemo v prvo posodo in na slepo izvlečemo kroglico, sicer sežemo v drugo posodo in izvlečemo kroglico.

a. (10) Izračunaj verjetnost, da je izvlečena kroglica bela.

b. (10) Izračunaj pogojno verjetnost, da je na kocki padla enica, pri pogoju, da smo izvlekli belo kroglico.

3. (20) V posodi je b belih, r rdečih in c črnih kroglic. Dva igralca izmenično izbirata kroglico, ki jo nato vrneta v posodo. Zmaga tisti, ki prvi potegne kroglico, ki ni črne barve. Z X označimo število potegov do zmage kateregakoli igralca.

a. (10) Navedite $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

b. (10) Izračunajte verjetnost, da zmaga prvi igralec na potezi.

4. (20) V procesu razvejanja lahko dopuščamo, da se v vsako generacijo "vseli" še slučajno mnogo pozameznikov. Naj bo Z_n število posameznikov v n-ti generaciji in označimo rodovno funkcijo Z_n z G_n. Velja zveza

$$G_{n+1}(s) = G_n(G(s)) \cdot H(s)\,,$$

kjer je $G_0(s) = s$, $G(s)$ rodovna funkcija slučajnega števila potomcev posameznika, $H(s)$ pa je rodovna funkcija slučajnega števila "priseljencev" v vsaki generaciji.

a. (10) Predpostavite, da je $G(s) = (s+1)/2$ in $H(s) = (s+1)/2$. Izračunajte $P(Z_2 = 1)$.

b. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da je $E(Z_n) = 1$ za vsak $n \geq 1$.

   Namig: Odvajanje rodovnih funkcij.

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana z

$$P(X = k, Y = l) = \binom{k+l}{l} \frac{a^k b^l}{(a+b+1)^{k+l+1}}$$

za dana $a > 0$ in $b > 0$ ter $k, l = 0, 1, 2, \ldots$.

a. (10) Izračunajte $P(X = 0)$. Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni?

b. (10) Izračunajte $E(Y|X = 0)$.

6. (20) Zavarovalnica izda 240.000 polic obveznega avtomobilskega zavarovanja. Premija je enaka £252. Povprečje dejansko izplačanih zahtevkov v preteklem letu je bilo £1240, standardni odklon dejansko izplačanih zahtevkov pa je bil £1830.

a. (10) Matematik, ki računa tveganja, najprej privzame, da bo zahtevkov 20%, torej 48.000. Zahtevki so med seboj neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke s povprečjem £1240 in standardnim odklonom £1830. Ocenite verjetnost, da zbrane premije ne bodo dovolj za izplačilo vseh zahtevkov.

b. (10) Matematik v zavarovalnici se zaveda, da ne more predvideti točnega števila zahtevkov, ki jih bo zavarovalnica morala izplačati v naslednjem letu. Zato spremeni svojo škatlo tako, da vanjo doda listke z ničlami in sicer štirikrat toliko, kolikor je bilo prvotno listkov. Povprečje škatle se tako spremeni na 248 £, standardni odklon pa na 956 £. V tem primeru je potrebno računati, kot da lističe izbiramo 240.000-krat. Ocenite zdaj verjetnost, da zbrane premije ne bodo dovolj za izplačilo vseh zahtevkov.