FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Pisni izpit

8. september 2003

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, na razpolago pa imate 120 minut.

Naloga	a.	b.	
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (30) Stirlingovo število S_k^n pove, na koliko načinov lahko razdelimo množico z n elementi na k disjunktnih, nepraznih podmnožic, katerih unija je enaka dani množici. Taki razdelitvi pravimo *particija*.

Primer: Recimo, da je dana množica $\{1,2,3,4,5\}$, torej $n=5$. Razdeliti jo želimo na 4 neprazne, disjunktne podmnožice. Možne particije so:

{1},{2},{3},{4,5}
{1},{2},{4},{3,5}
{1},{2},{5},{3,4}
{1},{3},{4},{2,5}
{1},{3},{5},{2,4}
{1},{4},{5},{2,3}
{2},{3},{4},{1,5}
{2},{3},{5},{1,4}
{2},{4},{5},{1,3}
{3},{4},{5},{1,2}

Torej je $S_4^5 = 10$.

a. (10) Pokažite, da je $S_2^n = 2^{n-1} - 1$ in $S_{n-1}^n = \binom{n}{2}$ za vsak n.

b. (10) Utemeljite, da je za $k \geq 2$

$$S_k^{n+1} = S_{k-1}^n + kS_k^n\,.$$

Namig: Element $n+1$ lahko ali dodate v že obstoječo množico ali pa ostane sam v svoji podmnožici.

c. (10) Na razpolago imate 4 različne barve, s katerimi bi radi pobarvali 7 hiš. Na koliko različnih načinov lahko to naredite, s tem, da vsako barvo uporabite *vsaj enkrat*.

Namig: Upoštevajte b.

2. (20) Dani sta dve pošteni igralni kocki. Njuna meta sta med seboj neodvisna. Za vsako naravno število n označimo z A_n dogodek, da je vsota pik na kockah deljiva z n.

a. (10) Izračunajte verjetnost dogodka A_5. Ali sta dogodka A_2 in A_5 neodvisna?

b. (10) Določite pogojno verjetnost, da sta na prvi kocki padli dve piki, če veste, da je vsota pik deljiva s 5. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so na prvi kocki padle štiri pike, če je vsota pik deljiva s 5.

3. (20) Previdna roparja A in B sta se odločila, da bosta na "delo" odhajala izmenično, dokler nekoga od njiju ne bodo dobili pri kraji. Privzemite, da so posamezni ropi med seboj neodvisni. Roparja A ujamejo z verjetnostjo a, roparja B pa z verjetnostjo b.

a. (10) Recimo, da začne z ropi oseba A. Kolikšna je verjetnost, da ga bodo dobili pri delu prej kot roparja B?

b. (10) Naj bo X celotno število ropov, vključno z zadnjim, ki ne uspe. Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X in njeno matematično upanje. Privzemite, da je začel ropati A.

4. (20) Oglejte si naslednjo varianto procesa razvejanja: na začetku imamo eno celico. Po geometrijskem času s parametrom p se bo ta celica razdelila na dve neodvisno od ostalih celic. Vse celice se bodo potem delile naprej po enakem načelu. Označite število celic v trenutku n z Z_n in rodovno funkcijo slučajne spremenljivke Z_n z $G_n(s)$. Velja $G_0(s) = s$ in

$$G_{n+1}(s) = G_n\big(s(q + ps)\big)\,,$$

kjer je $q = 1 - p$.

a. (10) Pokažite, da je $E(Z_n) = (1 + p)^n$.

b. (10) Izračunajte $P(Z_3 = 8)$.

5. (20) Na razpolago imamo pošteno igralno kocko in vrečo enakih nepoštenih kovancev, za katere je verjetnost, da na njih pade grb, enaka p. Najprej vržemo kocko in označimo z X število padlih pik. Nato iz vreče vzamemo X kovancev in jih vržemo na mizo. Pri tem so meti kovancev med seboj neodvisni. Naj slučajna spremenljivka Y pove število grbov, ki jih vidimo na mizi.

a. (10) Zapišite tabelo porazdelitve vektorja (X, Y).

b. (10) Izračunajte $E(X)$ ter $E(X|Y = 0)$.

6. (20) V podjetju HIT so v letu 1999 gostje igrali igro *Colore* 440.000-krat. Verjetnost za dobitek pri tej igri je $p = 0,00198079$.

a. (10) Zanima nas število S_n dobitkov v 440.000 igrah. To število je kot vsota 440.000 neodvisnih slučajnih spremenljivk z vrednostma 0 in 1, torej $S_n = X_1 + \cdots X_n$, kjer je $P(X_i = 1) = p$ in $P(X_i = 0) = 1 - p$. Z uporabo centralnega limitnega izreka izračunajte približno verjetnost, da bo dobitkov 920 ali več.

   Upoštevajte: $\Phi(1,64) = 0,95$.

b. (10) Recimo, da je izplačilo pri dobitku enako $x > 0$. Če gost stavi enoto in stavo dobi, mu to enoto vrnejo in dodajo še x enot. Pokažite, da je ta dobitek lahko največ $x = 502$, če naj bo verjetnost, da bo hiša po 440.000 igrah imela izgubo največ 0,01?

   Upoštevajte: $\Phi(-2,33) = 0,01$.