FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Pisni izpit

1. september 2004

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, na razpolago pa imate 120 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.					
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) V ravnini so dane točke A, B, C, D, E in F, od katerih nobena trojica ne leži na isti premici.

a. (5) Koliko različnih premic določajo te točke?

b. (5) Koliko različnih trikotnikov določajo te točke?

c. (5) Koliko med temi trikotniki je takih, ki imajo točko C za oglišče?

d. (5) Koliko je med temi trikotniki takšnih, ki imajo daljico AF za eno od stranic?

2. (20) Dva radarja odkrivata sovražna letala. Prvi radar odkrije sovražno letalo z verjetnostjo p, drugi pa z verjetnostjo q. Vsak radar odkrije posamezno letalo neodvisno od drugih letal in tudi neodvisno od drugega radarja. V območje radarskega nadzora priletijo tri sovražna letala.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da je neko letalo odkrito z radarjema? Kolikšna je verjetnost, da vsaj enega izmed letal ne odkrije noben radar?

b. (10) Recimo, da so vsa letala odkrita. Kolikšna je pogojna verjetnost, da drugi radar ni odkril nobenega?

3. (20) V posodi naj bosta črna kroglica in kroglica z oznako 1. Na vsakem koraku iz posode naključno izberemo kroglico. Če ima izbrana kroglica oznako k, jo vrnemo in dodamo še eno kroglico z oznako k. Če je kroglica črna, jo vrnemo v posodo in dodamo kroglico z oznako $n+1$, kjer je n največja oznaka do tik pred izbiranjem.

Primer: Prvih nekaj korakov lahko izgleda kot

⌊ l ‹ ⌋ → ⌊ l ‹ › ⌋ → ⌊ l ‹ › ‹ ⌋ → ⌊ l ‹ › ‹ fi ⌋ →

⌊ l ‹ › ‹ fi ‹ ⌋ → ⌊ l ‹ › ‹ fi ‹ fl ⌋ → ···

a. (10) Naj bo X število različno označenih kroglic takrat, ko je po $(n-1)$-em izbiranju v posodi vključno s črno natanko $n+1$ kroglic. Črne kroglice ne štejemo. Izračunajte

$$P(\text{pri } k\text{-tem izbiranju smo izbrali črno kroglico})$$

za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ in potem $E(X)$.

Namig: Indikatorji.

b. (10) Naj bo Y število kroglic z oznako 1 v posodi takrat, ko je po $(n-1)$-em izbiranju v posodi vključno s črno natanko $n+1$ kroglica. Izračunajte $P(Y=k)$ za $k = 1, 2, \ldots, n$.

4. (20) Naj bo K kvadrat s stranico 1 in naključno izberimo točko T v kvadratu. Naj bo slučajna spremenljivka X razdalja točke T do njej najbližje stranice.

a. (10) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke X.

b. (10) Določite še upanje slučajne spremenljivke X in tak z, da bo $P(X \leq z) = P(X \geq z)$.

5. (20) Za rodovne funkcije $G_0, G_1, G_2, \ldots$ slučajnih spremenljivk $X_0, X_1, X_2, \ldots$ naj velja rekurzivna zveza

$$G_0(s) = s \qquad \text{in} \qquad G_{n+1}(s) = s\,F(G_n(s))\,,$$

kjer je $F(s) = \frac{1}{2}(1 + s^2)$.

a. (10) Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke X_2.

b. (10) Pokažite, da velja rekurzivna formula $E(X_{n+1}) = E(X_n) + 1$ in nato z indukcijo pokažite, da velja $E(X_{n+1}) = n + 1$.

6. (20) Zavarovalnice pri avtomobilskem zavarovanju razmišljajo na sledeč način: recimo, da zavarujemo 100.000 ljudi. Vemo, da bo 19% od teh, torej 19.000, vložilo zahtevke. Zahtevki bodo različno visoki in jih vnaprej ne moremo napovedati. Lahko pa si predstavljamo, da bo celotna vsota zahtevkov kot vsota 19.000 naključno izbranih števil iz velike škatle, katere povprečje je enako £1.200 in standardni odklon £900.

a. (10) Izračunajte verjetnost, da bo vsota 19.000 naključno izbranih števil iz škatle večja od £23.085.329.

b. (10) Če zavarovalnica postavi premijo na £200, bo 100.000 zavarovancev skupno plačalo £20.000.000. Izračunajte verjetnost, da bo vsota 19.000 naključno izbranih števil večja od £20.000.000, torej verjetnost, da bo zavarovalnica imela izgubo.