

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

STATISTIKA

PISNI IZPIT

23. SEPTEMBER 2005

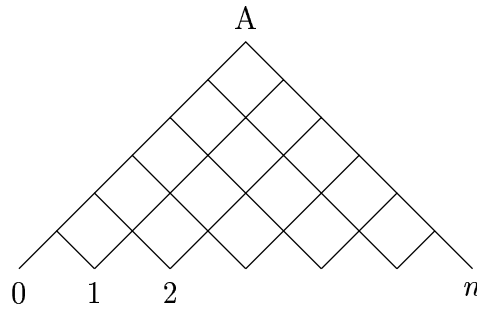
IME IN PRIIMEK: _____ VPISNA ŠT:

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, na razpolago pa imate 120 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Mesto T ima ulice v obliki trikotnika kot na sliki 1a. Hiše na spodnji strani trikotnika imajo številke $0, 1, 2, \dots, n$. Avtobusna postaja je v točki A.

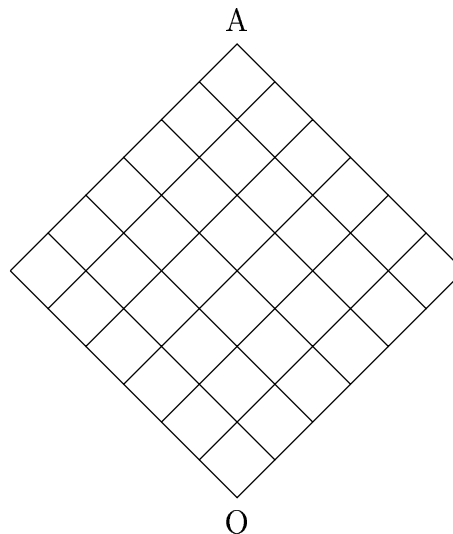


Slika 1a Tloris mesta T

- a. (10) Na koliko načinov lahko pridemo z avtobusne postaje A do hiše s številko k tako, da gremo vsakič le levo ali desno in se nikoli ne vračamo proti avtobusni postaji?

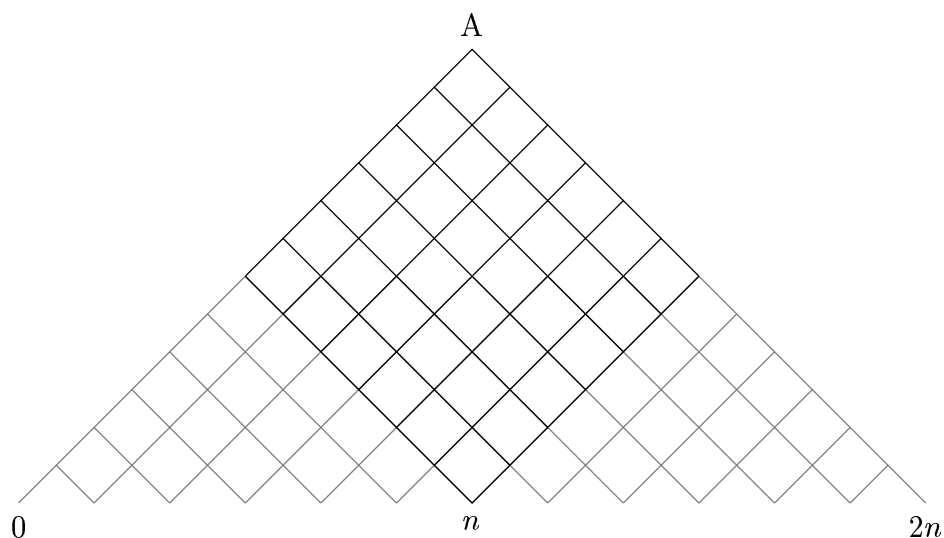
Namig: Razmislite, kolikokrat morate iti na levo, da pridete do hiše s številko k .

- b. (10) Mesto K ima obliko kvadrata kot na sliki 1b. Avtobusna postaja je v točki A, profesor pa stanuje v hiši O. Vzporrednih ulic je $n + 1$. Na koliko načinov lahko profesor pride z avtobusne postaje do svoje hiše tako, da gre vedno le levo ali desno in se nikoli ne vrača proti avtobusni postaji?



Slika 1b Tloris mesta K

Namig: V mislih dogradite mesto do trikotnega mesta kot na sliki 1c. V dograjenem mestu ima profesorjeva hiša hišno številko n od števil $0, 1, \dots, 2n$.



Slika 1c Mesto K dograjeno v trikotnik

2. (25) Janez pošilja Katarini kodirana sporočila v obliki črt in pik. Na poti se spremeni v črtico $\frac{2}{5}$ oddanih pik in se spremeni v piko $\frac{1}{3}$ oddanih črt. V zadnjem sporočilu je Janez oddal 62,5% pik.

- a. (10) Kolikšna je verjetnost, da je prvi znak v prejetem sporočilu črta?
- b. (10) Katarina je kot prvi znak prejela piko. Kolikšna je verjetnost, da je Janez piko tudi oddal?

3. (20) V nekem bloku živi n poročenih parov. V času zimskih obolenj naključno zboli m ljudi tega bloka ne glede na starost ali spol, pri čemer je $m \leq 2n$.

- a. (10) V bloku živita tudi zakonca Zupan. Določi verjetnost, da sta oba zakonca zdrava.
- b. (10) Z X označimo slučajno spremenljivko, ki nam pove število parov, v katerih sta obe osebi zdravi. Določi matematično upanje slučajne spremenljivke X .

Namig: Indikatorji.

4. (20) Naj bodo X , Y in Z med sabo neodvisne slučajne spremenljivke z $X \sim \text{Geom}(1/2)$, $Y \sim \text{Geom}(1/3)$ in $Z \sim \text{Geom}(1/4)$.

- a. (10) Izračunajte rodovno funkcijo vsote $W = X + Y + Z$.
 b. (10) Pokažite, da je

$$G_W(s) = \frac{s^3}{4(1-s/2)} - \frac{4s^3}{3(1-2s/3)} + \frac{9s^3}{8(1-3s/4)}$$

in dokažite, da je za $k = 0, 1, \dots$

$$P(W = k + 3) = \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{9}{8}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Namig: Za $|x| < 1$ je

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana s tabelo:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{4}{45}$	$\frac{8}{45}$	*
2	$\frac{2}{45}$	*	*
3	$\frac{2}{45}$	*	*
4	$\frac{2}{45}$	*	*

- a. (10) Dopolnite tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni.
 b. (10) Neodvisno od a. dela naloge dopolnite tabelo tako, da bo veljalo $P(X = 3, Y = k) = \frac{k}{45}$, $E(X|Y = 3) = \frac{21}{10}$ in $E(X|Y = 4) = \frac{24}{11}$.

6. (20) Čarovnik ima dve škatli: prvo s povprečjem 1 in standardnim odklonom 10, drugo pa s povprečjem -1 in standardnim odklonom 10. Ponuja nam naslednjo igro na srečo: naskrivaj bo izbral eno izmed škatel, vsako z verjetnostjo $1/2$. Nato bo iz izbrane škatle izbral $n = 100$ listkov s ponavljanjem in nam povedal vsoto. Če prav uganemo, katero škatlo je izbral, dobimo nagrado. Odločimo se, da bomo uganjevali na naslednji način: če je vsota pozitivna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem 1, če pa bo vsota negativna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem -1.

- a. (10) Recimo, da čarovnik izbere škatlo s povprečjem 1, vendar vam tega ne pove. Kolikšna približno je verjetnost, da boste prav uganili na podlagi vsote števil na 100 naključno izbranih lističih.

Namig: Računate $P(S_{100} > 0)$.

- b. (10) Recimo spet, da je čarovnik izbral škatlo s povprečjem 1. Kolikokrat bi moral izbirati lističe in nam povedati vsoto, da bi uganili prav z verjetnostjo približno 0,99?