FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Pisni izpit

5. september 2006

Ime in priimek: _____ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, na razpolago pa imate 120 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.					
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) V skupini otrok imamo n dečkov in n deklic. Otroke bi radi razmestili po parih, tako da dobimo n parov.

a. (10) Na koliko načinom lahko otroke razmestimo po parih, tako da bodo pari mešani po spolu?

Rešitev: Razmišljamo po osnovnem izreku kombinatorike. Dečke oštevilčimo z $1, 2, \ldots, n$. *Ko prvemu dečku izbiramo partnerko, imamo na izbiro* n *deklic, ko drugemu, imamo na izbiro* $n-1$ *deklic, ... Sledi, da je možnih razmestitev* $n!$.

b. (10) Prešteti želimo še vse razmestitve po parih ne glede na spol. Uporabite naslednji algoritem: $2n$ dečkov in deklic oštevilčite z $1, 2, \ldots, 2n$. Najprej otroku 1 izberite partnerja. V naslednjem koraku izberite partnerja otroku, ki še nima partnerja, ima pa najmanjšo stevilko med preostalimi otroci. Postopek nadaljujte, dokler vsem otrokom ne dodelite partnerja. Primer izbire s takim algoritmom:

$$(1,5), (2,3), (4,8), \ldots$$

Preštejte vse razmestitve.

Rešitev: Prvemu otroku lahko izbiramo partnerja med $2n-1$ *otroki. Na naslednjem koraku otroku z najmanjšo stevilko lahko izberemo partnerja na* $2n-3$ *načinov. Postopek nadaljujemo, dokler ni na izbiro en sam otrok. Po osnovnem izreku kombinatorike je vseh izbir*

$$(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1 = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}\,.$$

2. (20) Dogodki A, B in C naj bodo neodvisni z verjetnostmi p_1, p_2 in p_3.

a. (10) Izračunajte verjetnost, da se zgodita natanko dva od treh dogodkov.

Rešitev: Iskani dogodek označimo z H. Zapišemo lahko kot

$$H = (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)\,.$$

Dogodki v uniji so disjunktni, zato lahko verjetnosti posemzenih dogodkov seštejemo. Če upoštevamo še neodvisnost, sledi

$$\begin{aligned} P(H) &= P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B \cap C) \\ &= P(A)P(B)(1 - P(C)) + P(A)(1 - P(B))P(C) + \\ &\qquad +(1 - P(A))P(B)P(C) \\ &= p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - 3p_1p_2p_3\,. \end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte pogojno verjetnost, da se zgodita natanko dva dogodka pri pogoju, da se niso zgodili vsi trije dogodki hkrati.

Rešitev: Označimo z H dogodek, da sta se zgodila natanko dva dogodka, s K pa dogodek, da se niso zgodili vsi trije dogodki hkrati. Velja

$$K = A^c \cup B^c \cup C^c\,.$$

Opazimo, da je $H \subset K$. Računamo

$$\begin{aligned} P(H|K) &= \frac{P(H \cap K)}{P(K)} \\ &= \frac{P(H}{P(K)} \\ &= \frac{p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - 3p_1p_2p_3}{1 - p_1p_2p_3}\,. \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je

$$P(K) = 1 - P(K^c) = 1 - P(A \cap B \cap C)\,.$$

3. (20) Srečke pri loteriji so oštevilčene od 000000 do 999999. Izžrebana bo natanko ena številka, vse možne številke pa imajo enako verjetnost, da bodo izbrane. Vse srečke zadenejo, dobitek pa je odvisen od števila števk, ki se na istih mestih ujemajo. Če je bila, recimo, izžrebana številka 431515, naša srečka pa ima številko 451038, se ujemata dve števki (prva in tretja). Vsaka števka več, ki se ujema, pomeni desetkrat višji dobitek. Najnižji dobitek pri neujemanju vseh števk je a.

a. (10) Ko kupite srečko, bo vaš dobitek slučajna spremenljivka X. Izračunajte porazdelitev X.

Rešitev: Dobitek bo $a10^k$, če se bo ujemalo k števk za $k = 0, 1, \ldots, 6$. Naj bo Y število števk, ki se bodo ujemale z izžrebano številko. Ker so posmezne števke neodvisno izbrane, bo imela slučajna spremenljivka Y binomsko porazdelitev z $Y \sim \mathrm{Bin}(6, 1/10)$. Sledi

$$P(X = a10^k) = P(Y = k) = \binom{6}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{6-k}.$$

b. (10) Izračunajte matematično upanje $E(X)$.

Rešitev: Matematično upanje izračunamo po definiciji.

$$\begin{aligned}
E(X) &= a \sum_{k=0}^{6} 10^k \cdot P(X = 10^k) \\
&= a \sum_{k=0}^{6} 10^k \cdot \binom{6}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{6-k} \\
&= a \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} \left(\frac{9}{10}\right)^{6-k} \\
&= a \left(\frac{9}{10}\right)^6 \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} \left(\frac{9}{10}\right)^{-k} \\
&= a \left(\frac{9}{10}\right)^6 \left(1 + \frac{10}{9}\right)^6 \\
&= a \left(\frac{9}{10}\right)^6 \left(\frac{19}{9}\right)^6 \\
&= a \left(\frac{19}{9}\right)^6.
\end{aligned}$$

4. (20) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja z

$$G(s) = \frac{1+s}{2}\,.$$

Definirajte $W_n = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n$. Označite

$$H_n(s) = G_{W_n}(s)\,.$$

Za rodovne funkcije H_n velja rekurzija

$$H_{n+1}(s) = sG(H_n(s))\,.$$

a. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da za $n \geq 1$ velja

$$H_n(s) = \frac{s}{2^n}\left(2^{n-1} + 2^{n-2}s + 2^{n-3}s^2 + \cdots + 2s^{n-2} + s^{n-1} + s^n\right)\,.$$

Rešitev: Formula drži za $n = 0$ in $n = 1$. Predpostavimo, da formula drži za n. Računamo

$$\begin{aligned}
H_{n+1}(s) &= \frac{s}{2}(1 + H_n(s)) \\
&= \frac{s}{2}\left(1 + \frac{s}{2^n}\left(2^{n-1} + 2^{n-2}s + 2^{n-3}s^2 + \cdots + 2s^{n-2} + s^{n-1} + s^n\right)\right) \\
&= \frac{s}{2^{n+1}}\left(2^n + s\left(\left(2^{n-1} + 2^{n-2}s + 2^{n-3}s^2 + \cdots + 2s^{n-2} + s^{n-1} + s^n\right)\right)\right) \\
&= \frac{s}{2^{n+1}}\left(2^n + 2^{n-1}s + \cdots 2s^{n-1} + s^n + s^{n+1}\right)\,.
\end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte $E(W_n)$.

Namig: Matematično upanje je linearno.

Rešitev: Velja

$$E(W_n) = E(Z_0) + E(Z_1) + \cdots + E(Z_n)\,.$$

Iz rekurzije

$$G_{n+1}(s) = \frac{1 + G_n(s)}{2}$$

sledi, da je

$$E(Z_{n+1}) = G_n'(1) = \frac{G_n'(1)}{2} = \frac{E(Z_n)}{2}\,,$$

torej $E(Z_n) = 2^{-n}$. Sledi

$$E(W_n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\,.$$

5. (20) Za celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y naj velja

$$P(X=k,Y=l)=\begin{cases} \frac{n}{1+n} & \text{če je } k=l=0 \\ \frac{n^{k-1}}{(1+n)^{k+1}}\cdot\frac{k(k+1)\cdots(k+l-1)}{l!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k+l} & \text{če je } k>0 \text{ in } l\geq 0 \end{cases}$$

Če je $l=0$, interpretiramo izraz $k(k+1)\cdots(k+l-1)$ kot 1. Kot znano privzemite, da je

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{k(k+1)\cdots(k+l-1)}{l!}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+l}x^k=\left(\frac{1}{2-x}\right)^k$$

za $|x|\leq 1$.

a. (10) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Rešitev: Iz definicije porazdelitve X in Y razberemo, da je

$$P(X=0)=\frac{n}{1+n}\,.$$

Za $k>0$ računamo robno porazdelitev. Dobimo

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{l=0}^{\infty}P(X=k,Y=l) \\ &= \frac{n^{k-1}}{(1+n)^{k+1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{k(k+1)\cdots(k+l-1)}{l!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k+l} \\ &= \frac{n^{k-1}}{(1+n)^{k+1}}\left(\frac{1}{2-1}\right)^k \\ &= \frac{n^{k-1}}{(1+n)^{k+1}}\,. \end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte $E(Y|X=k)$ za vse $k=0,1,2,\ldots$.

Rešitev: Iz definicije sledi $E(Y|X=0)=0$. *Za* $k>0$ *računamo*

$$\begin{aligned}
E(Y|X=k) &= \sum_{l=0}^{\infty} lP(Y=l|X=k) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} l\frac{k(k+1)\cdots(k+l-1)}{l!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k+l} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{k(k+1)\cdots(k+l-1)}{(l-1)!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k+l-1} \\
&= \frac{k}{4}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(k+1)\cdots(k+l-1)}{(l-1)!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k+l-1} \\
&= k\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+1)\cdots(k+l-1)}{l!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1+l} \\
&= \frac{k}{4}\cdot\left(\frac{1}{2-1}\right)^{k+1} \\
&= k\,.
\end{aligned}$$

6. (20) Dva strastna igralca na srečo igrata ruleto v neskončnost. Ruletni cilinder ima 37 izsekov, od katerih je 18 rdečih, 18 črnih in 1 zelen. Prvi igralec vedno stavi \$1 na rdeče, drugi pa vedno stavi \$1 na številko 17, ki je črna. Čisti dobiček po eni igri je v primeru zmage za prvega \$1, za drugega pa \$35, v nasprotnem primeru pa oba izgubita stavo.

a. (10) Aproksimirajte verjetnost, da drugi igralec po 1000 igrah nima izgube.

Rešitev: Dobiček drugega igralca po 1000 *igrah je kot vsota* 1000 *med sabo neodvisnih slučajnih spremenljivk z matematičnim upanjem* $\mu = -1/37$ *in varianco* $\sigma^2 = 36 \cdot (1/37)(1 - 1/37)$. *Označimo dobiček po* 1000 *igrah s* S_{1000}. *Po centralnem limitnem izreku lahko verjetnost aproksimiramo s*

$$\begin{aligned} P(S_{1000} \geq 0) &= P(\frac{S_{1000} - \mu \cdot 1000}{\sqrt{1000} \cdot \sigma} \geq -\frac{\mu\sqrt{1000}}{\sigma}) \\ &\approx P(Z \geq 0,88) \\ &= 0,19\,. \end{aligned}$$

b. (10) Označite z X_n čisti profit prvega igralca po n igrah, z Y_n pa profit drugega igralca po n igrah. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n > X_n) = \lim_{n\to\infty} P(Y_n - X_n > 0)\,.$$

Utemeljite vaš razmislek.

Namigi: Napišite $Y_n - X_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k - V_k)$, *kjer je* U_k *čisti profit prvega igralca v* k*-ti igri in* V_k *čisti profit drugega igralca v isti igri. Slučajne spremenljivke* $U_k - V_k$ *so med sabo neodvisne z enako porazdelitvijo in* $\mathrm{var}(U_k - V_k) = 1368/37$.

Rešitev: Najprej opazimo, da je $E(U_k) = E(V_k) = -1/37$, *zato je* $E(U_k - V_k) = 0$. *Označimo* $\sigma^2 = \mathrm{var}(U_k - V_k)$. *Označimo* $S_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k - V_k)$. *Centralni limitni izrek pravi*

$$\lim_{n\to\infty}, P(\frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma} \geq 0) = P(Z \geq 0)\,.$$

Opazimo

$$P(\frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma} \geq 0) = P(S_n \geq 0) = P(Y_n > X_n)\,.$$

Sledi

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n > X_n) = \frac{1}{2}\,.$$