FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

1. kolokvij

4. december 2002

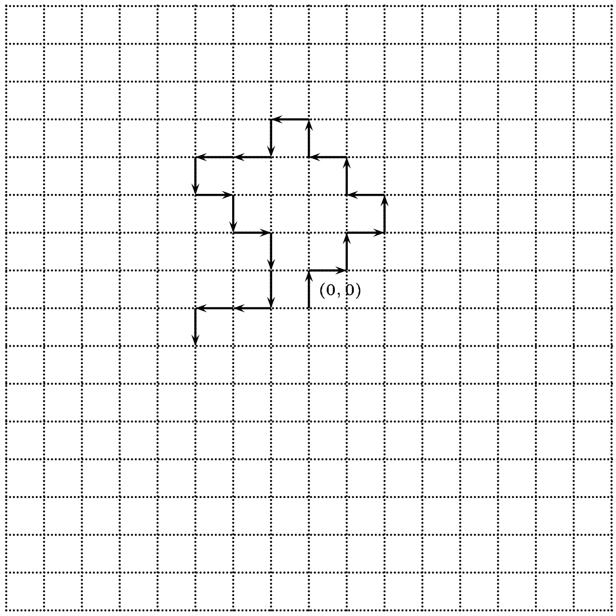
Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, na razpolago pa imate 90 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.					
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
Skupaj					

1. (50) Sprehod po celoštevilski mreži je pot, ki se začne v $(0, 0)$, na vsakem koraku pa lahko gremo za enoto na desno, levo, gor ali dol. Primer take poti je na sliki 1a.



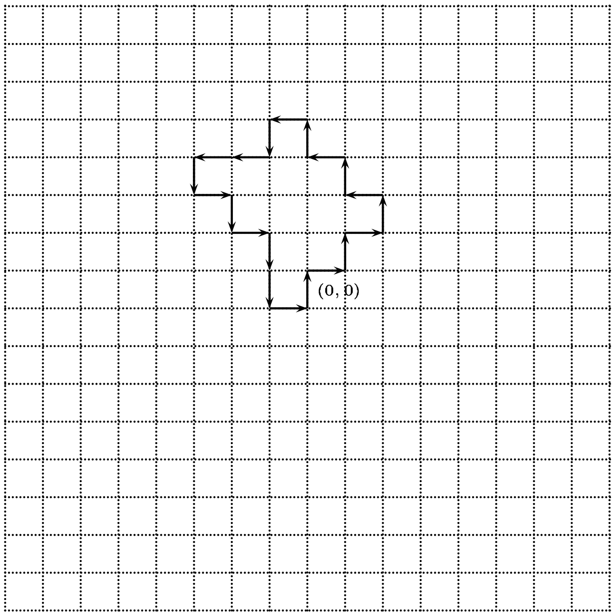
Slika 1a Primer sprehoda po $\mathbb{Z}^2$.

a. (5) Koliko je vseh sprehodov po $\mathbb{Z}^2$, ki imajo natanko n korakov?

b. (5) Koliko je sprehodov z natanko n koraki, ki gredo k_1-krat desno, k_2-krat levo, k_3-krat gor in k_4-krat dol? Pri tem je seveda $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = n$ in $k_i \geq 0$ za $i = 1, 2, 3, 4$.

c. (5) Na sliki 1b je sprehod dolžine $2n$, ki se začne in konča v točki $(0, 0)$. Pokažite, da je sprehodov, ki se začno in končajo v točki $(0, 0)$, in gredo natanko $2k$-krat "levo" ali "desno", natanko $(2n - 2k)$-krat pa "gor" ali "dol" točno

$$\binom{2n}{n}\binom{n}{k}^2 .$$



Slika 1b Primer sprehoda po $\mathbb{Z}^2$, ki se začne in konča v $(0,0)$.

d. (10) Kot znano upoštevajte, da je

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} .$$

Pokažite, da je vseh sprehodov z natanko $2n$ koraki, ki se začno in končajo v točki $(0,0)$, natanko

$$\binom{2n}{n}^2 .$$

Namig: Uporabite c., tudi če ne znate dokazati!

2. (25) Na izpit iz Statistike je prišlo 50 študentov, od katerih jih je 38 preštudiralo poglavji iz kombinatorike in verjetnosti, ostalih 12 pa ne. Verjetnost, da izpit opravi študent, ki je poglavji preštudiral, je 0,8, verjetnost, da izpit opravi nepripravljen študent pa je 0,15.

a. (15) Kolikšna je verjetnost, da slučajno izbrani študent opravi izpit?

b. (10) Na slepo izberemo enega študenta in ugotovimo, da je opravil izpit. Kolikšna je verjetnost, da se izbrani študent (kljub zanj ugodnemu razpletu) ni naučil poglavij iz kombinatorike in verjetnosti?

3. (25) Stojim pod šestimi stopnicami, ki so zaporedoma pobarvane z belo, rdečo, zeleno, belo, rdečo in zeleno barvo. V rokah držim kocko, na kateri sta dve ploskvi bele, dve rdeče in dve zelene barve. Meti kocke so med seboj neodvisni in vsi izidi so enako verjetni.

Da lahko stopim na naslednjo stopnico, moram na kocki vreči ustrezno barvo. V nasprotnem primeru obstojim na isti stopnici. Tako moram naprej vreči na kocki belo barvo, da lahko stopim na prvo stopnico, ko sem na njej, rdečo za na drugo stopnico in tako do vrha.

a. (10) Določite verjetnost, da uspem priti na zgornjo stopnico po natanko šestih metih.

b. (15) Določite verjetnost, da uspem priti na zgornjo stopnico v natanko trinajstih metih.

4. (25) Čarovnik iz dežele matematičnih čudes ima rad kocke. V njegovi zbirki so le čudne kocke s $p \geq 3$ ploskvami, kjer je p vedno praštevilo. Ko čarovnik tako kocko vrže, se z enako verjetnostjo pojavi katerakoli številka.

a. (10) Čarovnik izbere kocko s $p = 11$ in jo vrže. Naj bo A dogodek, da je število pik deljivo z 2 in B dogodek, da je število deljivo s 3. Ali sta dogodka A in B neodvisna?

b. (15) Čarovnik izbere nek p in vrže pripadajočo kocko. Pokažite, da je v primeru, ko sta poljubna dogodka A in B neodvisna, vsaj eden od dogodkov ali $\emptyset$ ali Ω.