FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

1. kolokvij

8. december 2004

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, na razpolago pa imate 90 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.					
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
Skupaj					

1. (25) Od vsake od črk a, b in c imamo po n primerkov. Sprva so črke v leksikografskem redu, torej

$$aaaaa\ldots abbbb\ldots.bbcc\ldots.c$$

Črke lahko poljubno permutiramo, kar lahko naredimo na $(3n)!$ načinov. [1]

a. (10) Koliko je različnih permutacij, če enakih črk ne razlikujemo med sabo?

Rešitev: Govorimo o permutacijah s ponavljanjem. Po formuli je takih permutacij

$$\frac{(3n)!}{(n!)^3}\,.$$

b. (10) Preštejte permutacije $3n$ črk, pri katerih po permutaciji nobena črka a ni na mestu, kjer je bila pred permutacijo črka a. Primer: če je $n = 3$ je

$$bcbacbcaa$$

taka permutacija.

Rešitev: Po permutaciji mora n črk a biti na mestih, kjer so bile pred permutacijo črke b ali c. Teh mest je $2n$ in med njimi izbiramo n mest. To lahko naredimo na $\binom{2n}{n}$ načinov. Črke a lahko na izbranih položajih poljubno permutiramo, kar lahko naredimo na $n!$ načinov. Ostalih $2n$ črk lahko tudi še poljubno permutiramo. Po osnovnem izreku kombinatorike je načinov

$$\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot (2n)! = \frac{[(2n)!]^2}{n!}\,.$$

c. (10) Preštejte permutacije $3n$ črk, pri katerih po permutaciji nobena od črk a ni na mestu, kjer je bila prej črka a in nobena od črk b ni na mestu, kjer je bila prej črka b. Primer: če je $n = 3$, je

$$cbcaacbab$$

taka permutacija.

Namig: Odgovor bo izražen z vsoto.

[1] Povzeto po A. De Moivre, *Doctrine of Chances*, Frank Cass and Company, 1738, Problem XXXV, str. 98.

Rešitev: Preštejmo najprej, na koliko načinov lahko izberemo nove položaje za črke a, tako da bo k od teh položajev med začetnimi položaji črk b in n − k med začetnimi položaji črk c. To lahko naredimo na $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ *načinov. Nato izbiramo položaje za črke b. Na razpolago je n + k položajev, izmed katerih izbiramo n položajev, kar lahko naredimo na* $\binom{n+k}{n}$ *načinov. Ko smo izbrali vse položaje, lahko posamezne črke še poljubno permutiramo. Po osnovnem izreku kombinatorike je odgovor*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}\binom{n+k}{n}(n!)^3 .$$

d. (10) Preštejte permutacije $3n$ črk, pri katerih po permutaciji nobena od črk ni na mestu, kjer je bila pred permutacijo črka istega tipa. Primer: če je $n = 3$ je

$$bcbaccaba$$

taka permutacija.

Namig: Odgovor bo izražen z vsoto.

Rešitev: Kot prej izberimo položaje črk a tako, da jih bo k med prvotnimi položaji črke b, n − k pa med prvotnimi položaji črke c. S tem smo določili tudi položaje n − k črk c in k črk b. Ostalih k črk c in n − k črk b razmestimo na začetne položaje črk a. Izbir je $\binom{n}{k}$*. Po osnovnem izreku kombinatorike je iskano število permutacij enako*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}\binom{n}{k}(n!)^3 .$$

2. (25) Ob začetku pisanja izpitov je v predavalnici M2 sedelo 16 študentov matematike in 20 študentov računalništva, v predavalnici M3 pa 10 študentov matematike in 14 študentov računalništva.
Z malo zamude sta na izpit prišla še dva študenta računalništva in vsak od njiju je neodvisno od drugega na slepo izbral eno od obeh predavalnic. Študenti bodo končali s pisanjem v naključnem vrstnem redu, tako da bo vsak od študentov z enako verjetnostjo prvi zaključil.

a. (10) Določi verjetnost, da je prvi študent, ki konča z izpitom, pisal izpit v M2.

Rešitev: Označimo možne hipoteze z

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\textit{oba študenta z zamudo sta pisala v predavalnici M2}\}\,, \\ H_2 &= \{\textit{študenta z zamudo sta pisala različnih predavalnicah}\}\,, \\ H_3 &= \{\textit{oba študenta z zamudo sta pisala v predavalnici M3}\} \end{aligned}$$

in z A dogodek, da prvi zapusti izpit študent iz predavalnice M2. Potem je

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) = \\ &= \frac{38}{72}\frac{1}{4} + \frac{37}{72}\frac{1}{2} + \frac{36}{72}\frac{1}{4} = \\ &= \frac{37}{72} \end{aligned}$$

b. (15) Določi pogojno verjetnost, da je prvi, ki zapusti predavalnico M2, študent matematike.

Rešitev: Označimo možne hipoteze z

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\textit{oba študenta z zamudo sta pisala v predavalnici M2}\}\,, \\ H_2 &= \{\textit{študenta z zamudo sta pisala različnih predavalnicah}\}\,, \\ H_3 &= \{\textit{oba študenta z zamudo sta pisala v predavalnici M3}\} \end{aligned}$$

in z B dogodek, da prvi zapusti predavalnico študent matematike. Potem je

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|H_1)P(H_1) + P(B|H_2)P(H_2) + P(B|H_3)P(H_3) = \\ &= \frac{16}{38}\frac{1}{4} + \frac{16}{37}\frac{1}{2} + \frac{16}{36}\frac{1}{4} = \\ &= 0,38 \end{aligned}$$

3. (25) V posodi sta na začetku bela in rdeča kroglica. Na vsakem koraku naključno izberemo kroglico med vsemi možnimi. Če je kroglica bela, jo vrnemo in dodamo še eno belo kroglico, če je rdeča, pa jo vrnemo in dodamo še eno rdečo kroglico. Število kroglic v posodi tako na vsakem koraku narase za 1.

a. (10) Izračunajte verjetnost, da v n izbirah najprej k-krat izberete belo kroglico nato na $(n-k)$-krat rdečo.

Rešitev: Verjetnost dobimo z množenjem pogojnih verjetnosti. Računamo

$$P(BBBB\cdots BRRRR\cdots R) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{k+2}\cdots\frac{(n-k)}{n+1}\,.$$

Izraz lahko še polepšamo v

$$P(BBBB\cdots BRRRR\cdots R) = \frac{k!\cdot(n-k)!}{(n+1)\cdot n!} = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}\,.$$

b. (15) Naj bo X število belih kroglic v posodi tik po n tem izbiranju, ko je v posodi $n+2$ kroglic. Izračunajte porazdelitev X.

Namig: Preštejte, na koliko načinov se lahko zgodi dogodek $\{X=k\}$. Kolikšne so verjetnosti posameznih načinov?

Rešitev: Možne vrednosti slučajne spremenljivke X so $k=1,2,\ldots,n+1$. Če želimo, da se zgodi dogodek $\{X=k\}$, mora v n izbiranjih natanko $(k-1)$-krat priti bela kroglica. Možnih vrstnih redov $(k-1)$ belih in $(n-k+1)$ rdečih kroglic je $\binom{n}{k-1}$. Hitro se prepričamo, da imajo vsi ti disjunktni načini enako verjetnost

$$\frac{1}{(n+1)\binom{n}{k-1}}\,.$$

Sledi

$$P(X=k) = \binom{n}{k-1}\cdot\frac{1}{(n+1)\binom{n}{k-1}} = \frac{1}{n+1}\,.$$

4. (25) Igralci A, B in C igrajo naslednjo igro: v posodi je a belih in b črnih kroglic. Igralci izbirajo kroglice naključno z vračanjem v vrstnem redu $ABCABC\ldots$[2] Zmaga tisti igralec, ki prvi izbere belo kroglico.

[2]Problem iz knjige Christian Huygens *De Raciociinis in Ludo Aleae*, 1657. Christian Huygens (1629-1695), nizozemski matematik.

a. (15) Recimo, da je se začne nova "runda" vsakič, ko izbira A. Naj bo Y število rund, ki jih bodo igrali igralci, dokler nekdo od njih ne zmaga. Primer: če je bilo $ABCABCAB$ in je B prvi potegnil belo kroglico, je zmagal B v tretji rundi. Opišite porazdelitev Y.

Namig: $(1-q)(1+q+q^2) = 1-q^3$.

Rešitev: Označimo $p = a/(a+b)$. *Naj bo* $k \geq 1$. *Dogodek* $\{Y = k\}$ *se bo zgodil, če se bo bela kroglica prvič pojavila na korakih* $3k$, $3k-1$ *ali* $3k-2$. *Označimo z* X *število izbiranj, dokler ne dobimo prve bele kroglice, vključno z zadnjo belo. Vemo, da je* $X \sim \mathrm{Geom}(p)$. *Torej je za* $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= P(X=3k-2) + P(X=3k-1) + P(X=3k) \\
&= pq^{3k-3} + pq^{3k-2} + pq^{3k-1} \\
&= (1-q)q^{3k-3}(1+q+q^2) \\
&= (1-q^3)(q^3)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Sledi $Y \sim \mathrm{Geom}(1-q^3)$.

b. (10) Izračunajte verjetnosti za zmago za posamezne igralce.

Rešitev: Označimo $p = a/(a+b)$. *Ker kroglice vračamo, so posamezne izbire med sabo neodvisne. Če označimo z* X *število kroglic do vključno prve bele, je* $X \sim \mathrm{Geom}(p)$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
P(\textit{zmaga } A) &= P(X = 3k+1 \textit{ za nek } k \geq 0) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 3k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} q^{3k} p \\
&= \frac{p}{1-q^3}
\end{aligned}$$

Podobno dobimo

$$P(\textit{zmaga } B) = \frac{pq}{1-q^3}$$

in

$$P(\textit{zmaga } C) = \frac{pq^2}{1-q^3}.$$