FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

1. kolokvij

6. december 2005

Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, na razpolago pa imate 90 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.					
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
Skupaj					

1. (25) V skupini otrok imamo n dečkov in n deklic. Otroke bi radi razmestili po parih, tako da dobimo n parov.

a. (10) Na koliko načinom lahko otroke razmestimo po parih, tako da bodo pari mešani po spolu?

   Rešitev: Razmišljamo po osnovnem izreku kombinatorike. Dečke oštevilčimo z $1, 2, \ldots, n$*. Ko prvemu dečku izbiramo partnerko, imamo na izbiro* n *deklic, ko drugemu, imamo na izbiro* $n-1$ *deklic, ... Sledi, da je možnih razmestitev* $n!$.

b. (15) Prešteti želimo še vse razmestitve po parih ne glede na spol. Uporabite naslednji algoritem: $2n$ dečkov in deklic oštevilčite z $1, 2, \ldots, 2n$. Najprej otroku 1 izberite partnerja. V naslednjem koraku izberite partnerja otroku, ki še nima partnerja, ima pa najmanjšo stevilko med preostalimi otroci. Postopek nadaljujte, dokler vsem otrokom ne dodelite partnerja. Primer izbire s takim algoritmom:

$$(1,5), (2,3), (4,8), \ldots$$

   Preštejte vse razmestitve.

   Rešitev: Prvemu otroku lahko izbiramo partnerja med $2n-1$ *otroki. Na naslednjem koraku otroku z najmanjšo stevilko lahko izberemo partnerja na* $2n-3$ *načinov. Postopek nadaljujemo, dokler ni na izbiro en sam otrok. Po osnovnem izreku kombinatorike je vseh izbir*

$$(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1 = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}\,.$$

2. (20) Na mizi sta dve posodi. V eni je 20 raznobarvnih kroglic: 10 belih, 5 črnih in 5 zelenih, druga pa je še prazna. Iz polne posode sočasno izvlečemo dve kroglici. Najključno izberemo eno izmed njiju in jo pogledamo. Nato spustimo kroglici v prazno posodo. Posodo pretresemo in iz nje naključno izvlečemo kroglico.

a. (10) Dokažite formulo

$$P(A|B) = P(A|B \cap C) \cdot P(C|B) + P(A|B \cap C^c) \cdot P(C^c|B)\,.$$

Rešitev: Po definiciji je

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B \cap C^c)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \cdot \frac{P(B \cap C)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B \cap C^c)}{P(B \cap C^c)} \cdot \frac{P(B \cap C^c)}{P(B)} \\ &= P(A|B \cap C) \cdot P(C|B) + P(A|B \cap C^c) \cdot P(C^c|B) \end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte pogojno verjetnost, da bo kroglica izvlečena iz druge posode bela pri pogoju, da je bila kroglica, ki smo jo pogledali bela.

Rešitev: Označimo

$$A = \{\textit{končna kroglica je bela}\}$$

in

$$B = \{\textit{naključno izbrana kroglica na prvem koraku je bela}\}\,.$$

Iščemo torej

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\,.$$

Označimo s $C = \{\textit{skrita kroglica je bela}\}$ *in uporabimo formulo. Vstavimo vrednosti in dobimo*

$$P(A|B) = 1 \cdot \frac{9}{19} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{19} = \frac{28}{38}\,.$$

3. (25) Iz kraja A v kraj B peljeta dve cesti. Iz kraja B v kraj C tudi peljeta dve cesti. Vsaka od cest je neprehodna z verjetnostjo p neodvisno od stanja ostalih cest.

a. (10) Izračunajte verjetnost, da ni prehodne poti iz kraja A v kraj C.

Rešitev: Označimo $H_{AB} = \{ni\ poti\ od\ A\ do\ B\}$ *in* $H_{BC} = \{ni\ poti\ od\ B\ do\ C\}$. *Potrebujemo verjetnost* $P(H_{AB} \cup H_{BC})$. *Računamo*

$$P(H_{AB} \cup H_{BC}) = P(H_{AB}) + P(H_{BC}) - P(H_{AB} \cap H_{BC}) \,.$$

Brž se prepričamo, da je $P(H_{AB}) = P(H_{BC}) = p^2$ *in* $P(H_{AB} \cap H_{BC}) = p^4$. *Torej je* $P(H_{AB} \cup H_{BC}) = 2p^2 - p^4$.

b. (15) Izračunajte verjetnost, da lahko pridemo iz kraja A v kraj B pri pogoju, da ni prehodne poti iz kraja A do kraja C.

Rešitev: Naloga sprašuje po $P(H_{AB}^c | H_{AB} \cup H_{BC})$. *Po formuli je*

$$\begin{aligned} P(H_{AB}^c | H_{AB} \cup H_{BC}) &= 1 - P(H_{AB} | H_{AB} \cup H_{BC}) \\ &= 1 - \frac{P(H_{AB}}{P(H_{AB} \cup H_{BC})} \\ &= 1 - \frac{p^2}{2p^2 - p^4} \\ &= \frac{p^2 - p^4}{2p^2 - p^4} \\ &= \frac{1 - p^2}{2 - p^2} \end{aligned}$$

4. (25) V skupini $2n$ otrok je n dečkov in n deklic. Privzemite, da je $n = 2m$ za neko celo število m. Kot znano upoštevajte, da lahko $2n$ otrok razmestimo v n parov na

$$\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

načinov.

Če $2n$ otrok povsem naključno razmestimo po parih, bo število parov, v katerih sta dva dečka, slučajna spremenljivka. Označimo jo z X. "Povsem naključno" pomeni, da je vsaka razmestitev po parih enako verjetna.

a. (15) Preštejte, koliko je takih razmestitev po parih, v katerih je natanko k parov, v katerih sta dečka.

Namig: V takih razmestitvah mora biti tudi točno k *parov iz deklic in* $4m - 4k$ *mešanih parov.*

Rešitev: Prešteti moramo, koliko je razmestitev po parih, v katerih je natanko k parov iz samih dečkov. Najprej izmed $2m$ *dečkov izberemo* $2k$ *dečkov. Izmed* $2m$ *deklic moramo tudi izbrati* $2k$ *deklic in jih razporediti po parih. Ostalih* $4m-4k$ *otrok razmestimo tako, da so pari mešani. Po osnovnem izreku kombinatorike to lahko naredimo na*

$$\left(\binom{2m}{2k}\cdot\frac{(2k)!}{2^k\cdot k!}\right)^2\cdot(2m-2k)!$$

načinov.

b. (10) Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Rešitev: Vrednosti slučajne spremenljivke X *so lahko* $k=0,1,2,\ldots,m$. *Za opis porazdelitve potrebujemo verjetnosti* $P(X=k)$ *za vse možne* k. *Iz a. in iz namiga sledi*

$$P(X=k)=\frac{\left(\binom{2m}{2k}\cdot\frac{(2k)!}{2^k\cdot k!}\right)^2\cdot(2m-2k)!}{\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}}\,.$$