

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO IN MEHANIKO

STATISTIKA

2. KOLOKVIJ

5. FEBRUAR 2003

IME IN PRIIMEK: _____ VPISNA ŠT:

--	--	--	--	--	--	--	--

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, na razpolago pa imate 90 minut.

Naloga	a.	b.	
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Na voljo vam je naslednja igra na srečo. Pred vsakim metom dveh poštenih igralnih kock stavimo \$1. Če pade na obeh kockah število 6, potem prejmemo \$5 (torej poleg vložene stave še 4\$). V primeru da sta obe cifri na kockah enaki, vendar ne šestici, se nam izplačajo \$3, v primeru, ko pade natanko ena šestica, pa \$2. Sicer ne prejmemo ničesar. Meti kock so med seboj neodvisni. Naj bo X dobiček ob koncu igre.

- a. (10) Določite pričakovani dobiček v tej igri, torej $E(X)$.
- b. (15) Izračunajte še $\text{var}(X)$.

2. (25) Užaljeni A je ljubimcu B svoje žene napovedal dvoboj. Pravila za dvoboj so naslednja: A in B bosta izmenično streljala eden na drugega, dokler ne bo nekdo od njiju zadet. Privzemite, da so posamezni streli med seboj neodvisni, A zadene z verjetnostjo a in B zadene z verjetnostjo b .

- a. (10) Recimo, da začne streljati A. Kolikšna je verjetnost, da se bo A uspešno maščeval?
- b. (15) Naj bo X celotno število strelav vključno z zadnjim. Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X in njeno matematično upanje. Privzemite, da je začel streljati A.

Namig: Obravnavajte $P(X = n)$ za sode in lihe n posebej.

3. (25) Naj bo X slučajna spremenljivka z vrednostmi $k = 0, 1, 2, \dots$, za katero velja

$$P(X = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(X = k - 1)$$

za $k = 1, 2, \dots$ in konstanti $a \neq 1$ in b .

a. (15) Pokažite, da velja $E(X) = \frac{a+b}{1-a}$.

b. (10) Naj bo $p \in (0, 1)$ in $q = 1 - p$. Naj velja

$$P(X = k) = \binom{m+k-1}{m-1} p^m q^k$$

za $k = 0, 1, 2, \dots$. Izračunajte $E(X)$.

Namig: Lahko uporabite a.

4. (25) V matematični genetiki se pojavi naslednja naloga: vsak od $N = \alpha + \beta + \gamma$ posameznikov je tipa AA, AB ali BB (tipa AB in BA obravnavamo kot enaka). Pri tem jih je α tipa AA, β tipa AB in γ tipa BB, pri čemer tip BA obravnavamo kot AB. Ko pride do naslednje generacije, se geni vsakega od N posameznikov razbijejo na sestavna dela A in B in se povsem naključno spet sestavijo po parih. Bolj natančno, imamo $2\alpha + \beta$ genov A in $\beta + 2\gamma$ genov tipa B. Vseh teh $2N$ genov se povsem naključno skombinira v N novih posameznikov s po dvema genoma.

a. (10) Označite novo nastale posameznike z številkami $1, 2, \dots, N$. Izračunajte verjetnosti $P(\text{posameznik } k \text{ je tipa } *)$ za $* \in \{AA, AB, BB\}$.

b. (15) Naj bo X število posameznikov tipa AA, ki so nastali z naključnimi kombinacijami, Y število posameznikov tipa AB in Z število posameznikov tipa BB. Izračunajte $E(X)$, $E(Y)$ in $E(Z)$.