FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko in mehaniko

Statistika

2. kolokvij

24. januar 2005

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, na razpolago pa imate 90 minut.

Naloga	a.	b.	
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) V teoriji zalog nastopi nasledni problem: pričakujemo, da bo povpraševanje po nekem izdelku celoštevilska slučajna spremenljivka X. V pričakovanju povpraševanja naročimo n izdelkov, kjer je n fiksno celo število. Če vse izdelke na zalogi prodamo, smo naredili cn prometa, kjer je c cena izdelka. Če je povpraševanje manjše od n, recimo $k < n$, naredimo ck prometa, vendar moramo za skladiščenje neprodanih izdelkov plačati $s(n-k)$, kjer je s cena za skladiščenje enega izdelka, tako da je celoten promet $ck - s(n-k)$.

a. (10) Predpostavite, da je $P(X = k) = pq^k$, kjer je $q = 1 - p$ in je $p \in (0,1)$. Označite z Y celoten promet po zgornjem opisu. Opišite porazdelitev Y.

Rešitev: Možne vrednosti slučajne spremenljivke Y so cn, če prodamo vse izdelke ali $ck - s(n-k)$ za $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Velja

$$P(Y = ck - s(n-k)) = P(X = k) = pq^k$$

in

$$P(Y = cn) = P(X \geq n) = q^n\,.$$

b. (15) Izračunajte $E(X)$. Kot znano uporabite, da je

$$\sum_{k=0}^{n-1} kq^k = \frac{q - (np+q)\ q^n}{p^2}\,.$$

Rešitev: Po definiciji je

$$E(Y) = \sum_{y_k} y_k\, P(Y = y_k)\,,$$

kjer so y_k vse možne vrednosti spremenljivke Y. Sledi

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^{n-1}(ck - s(n-k))pq^k + ncq^n \\ &= (c+s)p\sum_{k=0}^{n-1} kq^k - nsp\sum_{k=0}^{n-1} q^k + ncq^n \\ &= (c+s)p\,\frac{q-(np+q)\ q^n}{p^2} - \frac{nsp(1-q^n)}{p} + ncq^n\,. \end{aligned}$$

2. (25) Kovanec mečemo tako dolgo, da dobimo dva grba zapovrstjo. Označimo z X potrebno število metov vključno z zadnjim grbom. Slučajna spremenljivka X zavzame lahko vrednosti $k = 2, 3, \ldots$, pri tem pa velja $P(X = 0) = P(X = 1) = 0$, $P(X = 2) = 1/4$ in za $k \geq 3$

$$P(X = k) = \frac{1}{2}\, P(X = k-1) + \frac{1}{4}\, P(X = k-2)\,.$$

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Namig: Množite levo in desno stran s k in seštejte po $k \geq 3$.

Rešitev: Levo in desno stran enačbe pomnožimo s k in seštejemo po $k \geq 3$. Na levi strani nam v formuli za matematično upanje manjka člen $2 \cdot P(x = 2)$. Z upoštevanjem tega računamo

$$\begin{aligned}
E(X) - \frac{1}{2} &= \sum_{k=3}^{\infty} k \cdot P(X = k) \\
&= \sum_{k=3}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\, P(X = k-1) + \frac{1}{4}\, P(X = k-2) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} [(k-1) + 1]\, P(X = k-1) + \\
&\qquad + \frac{1}{4} \sum_{k=3}^{\infty} [(k-2) + 2]\, P(X = k-2) \\
&= \frac{1}{2}\,(E(X) + 1) + \frac{1}{4}\,(E(X) + 2) \\
&= \frac{3}{4}\, E(X) + 1\,.
\end{aligned}$$

Iz te enačbe za $E(X)$ sledi $E(X) = 6$.

b. (15) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

Namig: Pišite $k^2 = (k-1)^2 + 2(k-1) + 1$ in $k^2 = (k-2)^2 + 4(k-1) + 4$.

Rešitev: Množimo na levi in desni s k^2 in seštejemo po $k \geq 3$. Na levi do $E(X^2)$

manjka člen $2^2 \cdot P(X=2)$. *Računamo*

$$
\begin{aligned}
E(X^2)-1 &= \sum_{k=3}^{\infty} k^2 \cdot P(X=k) \\
&= \sum_{k=3}^{\infty} k^2 \left(\frac{1}{2}\,P(X=k-1)+\frac{1}{4}\,P(X=k-2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty}\left[(k-1)^2+2(k-1)+1\right]P(X=k-1)+ \\
&\qquad +\frac{1}{4}\sum_{k=3}^{\infty}\left[(k-2)^2+4(k-1)+4\right]P(X=k-2) \\
&= \frac{1}{2}\left(E(X^2)+2E(X)+1\right)+\frac{1}{4}\left(E(X^2)+4E(X)+4\right) \\
&= \frac{3}{4}\,E(X^2)+2E(X)+\frac{3}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Za $E(X^2)$ *sledi enačba*

$$
\frac{1}{4}\,E(X^2)=\frac{27}{2}\,,
$$

torej $E(X^2)=54$ *in* $\mathrm{var}(X)=18$.

3. (25) Generatorji slučajnih števil generirajo zaporedja ničel in enk. Privzemamo, da so posamezne številke neodvisne kot so neodvisni meti kovanca in je za vsako generirano število verjetnost 1/2, da bo enako 1.

a. (10) Pri preverjanju kvalitete generatorja slučajnih števil definiramo slučajno spremenljivko Y, ki šteje, kolikokrat sta se v nizu n generiranih slučajnih ničel in enk pojavili dve enki zapovrstjo. Pri tem dopuščamo prekrivanje v smislu, da sta se v nizu 1011011110111 dve enki zapovrstjo pojavili šestkrat. Izračunajte $E(Y)$.

Rešitev: Definiramo indikatorske slučajne spremenljivke s predpisom

$$I_k = \begin{cases} 1 & \textit{če sta na mestih } k \textit{ in } k+1 \textit{ enki}, \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

za $k = 1, 2, \ldots, n-1$. *Velja* $Y = I_1 + I_2 + \cdots + I_{n-1}$, *poleg tega pa se hitro prepričamo, da je*

$$E(I_k) = P(I_k = 1) = \frac{1}{4}.$$

Sledi

$$E(Y) = \frac{n-1}{4}],.$$

b. (15) Naj bo Z število pojavljanj zaporedja 011 v nizu n generiranih slučajnih števil, pri čemer ne dopuščamo prekrivanja. Izračunajte $E(Z)$.

Rešitev: Dve prekrivajoči zaporedji po treh generiranih števil ne moreta biti hkrati enaki 011, zato omjitev na neprekrivajoče nize ni pomembna. Spet definiramo

$$I_k = \begin{cases} 1 & \textit{če so na mestih } k \textit{ in } k+1 \textit{ in } k+2 \textit{ števila 011}, \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

za $k = 1, 2, \ldots, n-2$. *Velja* $Z = I_1 + I_2 + \cdots + I_{n-2}$. *Zaradi neodvisnosti je* $E(I_k) = 1/8$, *torej*

$$E(Z) = \frac{n-2}{8}.$$

4. (25) Na krožnici s polmerom $R = 1$ izberemo fiksno točko A. Nato na krožnici povsem naključno izberemo točko. Naj bo X razdalja med naključno izbrano točko in točko A. Za $0 \leq x \leq 2$ velja

$$P(X \leq x) = c \cdot \arccos\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

kjer je c ustrezna konstanta.

a. (10) Določite konstanto c in izračunajte gostoto slučajne spremenljivke X.

Rešitev: Slučajna spremenljivka X ima vrednosti na intervalu $[0, 2]$, zato je $P(X \leq 2) = 1$. Sledi

$$1 = P(X \leq 2) = c\arccos(-1) = c\pi\,,$$

torej $c = 1/\pi$. Gostoto dobimo z odvajanjem porazdelitvene funkcije. Računamo

$$\begin{aligned}
F'_X(x) &= \left(\frac{1}{\pi}\arccos\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right)' \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - \frac{x^4}{4}}} \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2x}{x\sqrt{4 - x^2}} \\
&= \frac{2}{\pi\sqrt{4 - x^2}}\,.
\end{aligned}$$

b. (15) Izračunajte $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

Namig: Lahko uporabite zvezo med funkcijo beta in funkcijo gama.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^2 x\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^2 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4 - x^2}} \\
&= -\frac{2}{\pi}\sqrt{4 - x^2}\,\Big|_0^2 \\
&= \frac{4}{\pi}\,.
\end{aligned}$$

Za varianco potrebujemo $E(X^2)$. Računamo

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^2 x^2\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^2 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{4u\,\mathrm{d}x}{\sqrt{u}\,\sqrt{4-4u}} \\
&= \frac{4}{\pi}\,\mathrm{Beta}\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{4}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} \\
&= 2\,.
\end{aligned}
$$

Sledi

$$
\mathrm{var}(X) = 2 - \frac{16}{\pi^2}\,.
$$