FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko in mehaniko

Statistika

2. kolokvij

26. januar 2006

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, na razpolago pa imate 90 minut.

Naloga	a.	b.	
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) V posodi je B belih in R redečih kroglic. Iz posode izbiramo kroglice po vrsti povsem naključno, dokler ne izberemo vseh B belih kroglic. Označite z X število vseh izbiranj vključno z zadnjim izbiranjem.

a. (15) Izračunajte verjetnost $P(X \leq k)$ za vse $k = B, B+1, \ldots, B+R$.

Rešitev: Možne vrednosti za slučajno spremenljivko X so $k = B, B+1, \ldots, N$, kjer je $N = B+R$. Dogodek $\{X \leq k\}$ se zgodi, če je med k izbranimi kroglicami B belih. Ker je izbiranje povsem naključno, je izbranih k kroglic naključna izbira k kroglic, torej z uporabo hipergeometrijske porazdelitve dobimo

$$P(X \leq k) = \frac{\binom{B}{B}\binom{R}{k-B}}{\binom{N}{k}} = \frac{\binom{R}{k-B}}{\binom{N}{k}}\,.$$

b. (10) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Rešitev: Za $k = B+1, \ldots, N$ velja

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)\,,$$

torej

$$P(X = k) = \frac{\binom{R}{k-B}}{\binom{N}{k}} - \frac{\binom{R}{k-B-1}}{\binom{N}{k-1}}$$

za $k = B$ pa

$$P(X = B) = P(X \leq B) = \frac{1}{\binom{N}{B}}\,.$$

2. (25) Spomladi na vrtu raste n marjetic, n zvončkov in n telohov, kjer je n neko naravno število. Naključno sestavimo šopek $2n$ cvetlic. Pri tem nam naj slučajne spremenljivke X, Z in T zaporedoma povejo število marjetic, zvončkov in telohov v šopku.

a. (10) Določite verjetnost, da je v šopku toliko marjetic kot zvončkov in telohov skupaj.

   Rešitev: Naloga sprašuje po verjetnosti, da je v šopku n marjetic. Ker je $X \sim \mathrm{HiperGeom}(2n, n, 3n)$, je iskana verjetnost enaka

$$P(X = n) = \frac{\binom{n}{n}\binom{2n}{n}}{\binom{3n}{2n}} = \frac{((2n)!)^2}{n!(3n)!}\,.$$

b. (15) Določite porazdelitve slučajnih spremenljivk X, Z in T ter njihova upanja.

   Rešitev: Spremenljivke X, Z in T so enako porazdeljene in velja $X \sim Z \sim T \sim HiperGeom(2n, n, 3n)$. Upanje teh slučajnih spremenljivk je tako enako $E(X) = E(Z) = E(T) = 2n \cdot \frac{n}{3n} = \frac{2n}{3}$.

3. (20) Kovanec mečemo, dokler ne pade vsaj en grb in vsaj ena številka. Označimo število potrebnih metov z X. Meti so med sabo neodvisni in verjetnost za grb v vsakem metu je p.

a. (10) Poiščite $P(X = k)$ za $k = 2, 3, \ldots$.

Rešitev: Fiksirajmo k. Dogodek $\{X = k\}$ se lahko zgodi na dva načina: ali $(k-1)$ grbov in potem številka, ali $(k-1)$ številk in potem grb. Načina sta disjunktna, zato

$$P(X = k) = p^{k-1}q + pq^{k-1}\,.$$

b. (10) Izračunajte $E(X)$.

Namig: Če je $Y \sim \mathrm{Geom}(\rho)$, je $E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\rho)^{k-1}\rho = 1/\rho$.

Rešitev: Možnosti za rešitev je več. Po definiciji računamo

$$E(X) = \sum_{k=2}^{\infty} kP(X = k)\,.$$

Izračunajmo najprej

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} kpq^{k-1} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1}\right) - p \\ &= \frac{1}{p} - p \end{aligned}$$

Vsota v oklepaju je matematično upanje geometrijske spremenljivke s parametrom p. Podobno izračunamo tudi drugo vsoto. Dobimo

$$E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\,.$$

4. (20) Daniel Bernoulli je leta 1768 zastavil naslednji problem: Imamo $2n$ zakonskih parov in naj bo $m \leq 2n$ dano naravno število. Privzemite, da Bog naključno izbere m izmed $2n$ ljudi in jih pokliče k sebi (to je znano tudi kot to, da izbranih m ljudi umre). Naj bo X slučajno število še živečih parov.

a. (10) Izberite nek par in izračunajte verjetnost, da par preživi.

Rešitev: Izračunamo

$$P(\textit{par preživi}) = \frac{\binom{2n-2}{m}}{\binom{2n}{m}}\,.$$

V števcu je število vseh možnih izbir m ljudi, med katerimi ni obravnavanih zakoncev.

b. (15) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: Oštevilčite pare z $1, 2, \ldots, n$ *in definirajte*

$$I_k = \begin{cases} 1 & k\text{-}ti \ par \ preživi, \\ 0 & k\text{-}ti \ par \ ne \ preživi. \end{cases}$$

Seveda je $X = I_1 + \cdots + I_n$. *Najprej izračunamo*

$$P(I_1 = 1) = P(\textit{par preživi}) = \frac{\binom{2n-2}{m}}{\binom{2n}{m}}\,.$$

V števcu je število vseh možnih izbir m ljudi, med katerimi ni obravnavanih zakoncev. Sledi

$$E(X) = E(I_1) + \cdots + E(I_n) = \frac{n\binom{2n-2}{m}}{\binom{2n}{m}}\,.$$