FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko in mehaniko

Verjetnostni račun in statistika

3. kolokvij

19. april 2000

Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, na razpolago pa imate 90 minut.

Naloga	a.	b.	
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Porazdelitev slučajne spremenljivke X naj bo podana s predpisom:

$$P(X=k) = c\,2^{-k} \quad \text{za } k=1,2,3,4$$

a. (5) Določite konstanto c.

Rešitev: Veljati mora $\sum_k P(X=k)=1$. *Od tod izračunamo:*

$$c = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)^{-1} = \frac{16}{15}$$

b. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev:

$$E(X) = \sum_k k\,P(X=k) = \frac{16}{15}\left(1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{16}\right) = \frac{26}{15}$$

c. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

Rešitev:

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$E(X^2) = \sum_k k^2\,P(X=k) = \frac{16}{15}\left(1\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}+9\cdot\frac{1}{8}+16\cdot\frac{1}{16}\right) = \frac{58}{15}$$

$$\mathrm{var}(X) = \frac{194}{225}$$

2. (25) Porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) je podana s tabelo:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$
$X = 1$	$\frac{1}{20}$	?	?
$X = 2$	?	?	?

a. (15) Dopolnite tabelo tako, da bosta X in Y neodvisni, in določite robni porazdelitvi.

Rešitev: S seštetjem prve vrstice dobimo $P(X = 0) = \frac{1}{10}$. *Nato z upoštevanjem formule* $P(X = 0, Y = y) = P(X = 0)\, P(Y = y)$ *dobimo robno porazdelitev* $P(Y = 0) = \frac{1}{6}$, $P(Y = 1) = \frac{1}{3}$ *in* $P(Y = 2) = \frac{1}{2}$. *Nadalje iz* $P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1)\, P(Y = 0)$ *sledi* $P(X = 1) = \frac{3}{10}$ *in nato še* $P(X = 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = \frac{3}{5}$. *Nazadnje iz formule* $P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y)$ *dobimo še preostale vrednosti v tabeli:*

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$
$X = 1$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$
$X = 2$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

b. (10) Izračunajte $E(XY^2)$

Rešitev: Zaradi neodvisnosti velja:

$$
\begin{aligned}
E(XY^2) &= E(X)\, E(Y^2) \\
E(X) &= 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{2} \\
E(Y^2) &= 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{3} \\
E(XY^2) &= \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

3. (25) Slučajne spremenljivke X_1, X_2, X_3 naj imajo porazdelitev, dano z

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)} \cdot \frac{\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\lambda_3^{k_3}}{k_1!k_2!k_3!}$$

za dane pozitivne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, pri čemer je $k_i \geq 0$ za vse $1 \leq i \leq 3$.

a. (15) Ali so slučajne spremenljivke X_1, X_2, X_3 med sabo neodvisne? Utemeljite odgovor.

Rešitev: Opazimo, da za porazdelitev slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots, X_n$ velja

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n) = f_1(k_1) \cdots f_n(k_n)\,,$$

kjer je

$$f_i(k_i) = e^{-\lambda_i} \cdot \frac{\lambda_i^{k_i}}{k_i!}\,.$$

Po izreku s predavanj je to dovolj za neodvisnost.

b. (10) Poiščite robne porazdelitve slučajnih spremenljivk X_i za $1 \leq i \leq 3$ in jih poimenujte.

Rešitev: Robne porazdelitve lahko razberemo iz funkcij f_i iz točke a., saj vemo, da mora biti

$$P(X_i = k_i) = c_i f_i(k_i)$$

za neko konstanto c_i. Ker pa je

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_i(j) = 1\,,$$

je $c_i = 1$. Dobimo $X_i \sim \mathrm{Po}(\lambda_i)$.

4. (25) Za okroglo mizo sedi 8 gostov, ki igrajo karte. Vsak ima v rokah 1 karto razdeljeno z dobro premešanega kupa 52 kart. Vsak lahko vidi le svojo karto. Če nekdo ima asa, bo stavil svojo ženo, sicer ne bo stavil ničesar.

a. (10) Definirajte

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{če igralec } i \text{ stavi svojo ženo} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Izračunajte $P(I_i = 1)$ in $P(I_i = 1, I_j = 1)$ za $i \neq j$.

Rešitev: Verjetnost $P(I_i = 1)$ je enaka verjetnosti, da ima igralec i asa. Ta verjetnost je kar $4/52$, ker si lahko mislimo, da karte začnemo deliti z vrha pri igralcu i. Pri izračunu verjetnosti $P(I_i = 1, I_j = 1)$ si ravno tako mislimo, da karte začnemo deliti z vrha pri igralcih i in j. Iskana verjetnost je potem verjetnost, da sta na vrhu kupa kart dva asa, torej $(4/52) \cdot (3/51)$.

b. (10) Naj bo X število igralcev, ki bodo stavili svojo ženo. Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

Rešitev: Seveda je $X = \sum_{i=1}^{8} I_i$, zato lahko varianco računamo po formuli

$$\mathrm{var}(X) = \sum_{i=1}^{8} \mathrm{var}(I_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{cov}(I_i, I_j)\,.$$

Vemo, da je

$$\mathrm{var}(I_i) = P(I_i = 1)(1 - P(I_i = 1)) = \frac{4 \cdot 48}{52^2}$$

za vse i. Zaradi simetrije so tudi vse kovariance enake. Računamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(I_i, I_j) &= P(I_i = 1, I_j = 1) - P(I_i = 1) \cdot P(I_j = 1) \\
&= \frac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51} - \frac{4^2}{52^2} \\
&= \frac{4}{52} \cdot \left(\frac{3}{51} - \frac{4}{52}\right) \\
&= -\frac{4}{52} \cdot \frac{48}{52 \cdot 51} \\
&= -\frac{1}{13} \cdot \frac{12}{13 \cdot 51} \\
&= -\frac{12}{13^2 \cdot 51}
\end{aligned}$$

Računamo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &= 8 \cdot \frac{12}{13^2} - 8 \cdot 7 \cdot \frac{12}{13^2 \cdot 51} \\
&= 8 \cdot \frac{12}{13^2} \cdot \left(1 - \frac{7}{51}\right) \\
&= \frac{4416}{8619}
\end{aligned}
$$