FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

STATISTIKA

3. KOLOKVIJ

9. APRIL 2003

IME IN PRIIMEK: ______________________________ VPISNA ŠT: | | | | | | | | |

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, na razpolago pa imate 90 minut.

Naloga	a.	b.	c.	
1.			•	
2.				
3.			•	
4.			•	
Skupaj				

1. (25) V matematični genetiki se pojavi naslednja naloga: vsak od $N = \alpha + \beta + \gamma$ posameznikov je tipa AA, AB ali BB (tipa AB in BA obravnavamo kot enaka). Pri tem jih je α tipa AA, β tipa AB in γ tipa BB, pri čemer tip BA obravnavamo kot AB. Ko pride do naslednje generacije, se geni vsakega od N posameznikov razbijejo na sestavna dela A in B in se povsem naključno spet sestavijo po parih. Bolj natančno, imamo $2\alpha+\beta$ genov A in $\beta+2\gamma$ genov tipa B. Vseh teh $2N$ genov se povsem naključno skombinira v N novih posameznikov s po dvema genoma.

a. (10) Označite novo nastale posameznike z številkami $1, 2, \ldots, N$. Izračunajte verjetnosti P(posameznik 1 je tipa AA) in P(posameznika 1 in 2 sta tipa AA).

b. (15) Naj bo X število posameznikov tipa AA, ki so nastali z naključnimi kombinacijami. Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

Namig: Indikatorji.

2. (25) V rokah držimo imamo dva nepoštena kovanca, enega za 5 SIT in drugega za 10 SIT. Oba vržemo v zrak, pri čemer sta meta posameznih kovancev neodvisna. Verjetnost grba na posameznem kovancu je enaka $p \in (0, 1)$, verjetnost cifre pa $q = 1 - p$. Definirajmo slučajni spremenljivki

$$X = \begin{cases} 1, & \text{če pade na prvem kovancu cifra (torej 5),} \\ 0, & \text{če pade na prvem kovancu grb,} \end{cases}$$

Y pa naj bo vsota vrednosti na obeh kovancih (pri tem je vrednost nekega kovanca 0, če na njem pade grb).

a. (10) Izdelajte tabelo porazdelitve slučajnih spremenljivk X in Y.

b. (5) Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni?

c. (10) Izračunajte še $E(XY)$.

3. (25) V temni škatli je 10 kock, Od tega je 9 običajnih poštenih igralnih kock (torej s številkami 1, 2, 3, 4, 5 in 6), deseta pa je sicer poštena, ampak so na njej zapisana števila 0, 1, 2, 4, 8 in 16.

a. (10) Na slepo izvlečemo kocko iz škatle in jo vržemo. Naj bo X število pik, ki jih zagledamo na kocki. Izračunajte pričakovano vrednost slučajne spremenljivke X.

b. (15) Denimo, da v rokah držimo dve različni zgoraj opisani kocki in ju vržemo. Naj bo Y število pik na običajni kocki, z A pa označimo dogodek, da na njej pade (strogo) več pik kot na nenevadni deseti kocki. Izračunajte pogojno matematično upanje $E(Y|A)$.

4. (25) Statistika A in B sta vsak 100-krat vrgla kovanec. Predpostavljajte, da so vsi meti med sabo neodvisni, verjetnost za grb pri metu kovanca pa je za oba statistika enaka $p \in (0,1)$. Označite z X število grbov, ki jih dobi statistik A, z Y pa število grbov, ki jih dobi statistik B. Naj bo $Z = X + Y$ skupno število grbov.

a. (10) Izračunajte $P(X = k | Z = n)$ za dan $0 \leq n \leq 200$ in $\max(0, n-100) \leq k \leq \min(100, k)$.

   Namig: Namesto, da A in B vržeta vsak svoj kovanec 100*-krat, si lahko predstavljate, da vrže najprej A kovanec* 100*-krat, potem pa še B isti kovanec* 100*-krat.*

b. (15) Izračunajte $E(X|Z = n)$ in $E(X^2|Z = n)$ za dan $0 \leq n \leq 200$.

   Namig: Poskusite prepoznati pogojno porazdelitev X glede na dogodek $\{Z = n\}$.