

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

STATISTIKA

3. KOLOKVIJ

7. APRIL 2004

IME IN PRIIMEK: _____ VPISNA ŠT:

--	--	--	--	--	--	--	--

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, na razpolago pa imate 90 minut.

Naloga	a.	b.	c.	
1.			•	
2.				
3.			•	
4.			•	
Skupaj				

1. (25) V posodi je B belih, R rdečih in G zelenih kroglic. Kroglice začnemo izbirati **z vračanjem** povsem naključno, tako da ima vsaka kroglica enako verjetnost, da jo izberemo. Označimo z X število izbiranj dokler ne izberemo bele kroglice, vključno z zadnjim izbiranjem. Podobno označimo z Y število izbiranj dokler ne izberemo prvič rdeče kroglice in Z število izbiranj, dokler ne izberemo prvič zelene kroglice.

a. (10) Izračunajte $P(X = 1, Y = l, Z = m)$ za $1 < l < m$.

Namig: Pomislite v kakšnem vrstnem redu morate dobiti kroglice različnih barv, da se zgodi dogodek $\{X = 1, Y = l, Z = m\}$.

b. (15) Poiščite večrazsežno porazdelitev spremenljivk Y in Z .

2. (25) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana s tabelo:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{4}{45}$	$\frac{8}{45}$	*
2	$\frac{2}{45}$	*	*
3	$\frac{2}{45}$	*	*
4	$\frac{2}{45}$	*	*

a. (10) Dopolnite tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni.

b. (15) Neodvisno od a. dela naloge dopolnite tabelo tako, da bo veljalo $P(X = 3, Y = k) = \frac{k}{45}$, $E(X|Y = 3) = \frac{21}{10}$ in $E(X|Y = 4) = \frac{24}{11}$.

3. (25) Slučajni spremenljivki X in Y imata porazdelitev dano s predpisom

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{2004(2004 - k)}$$

za $k = 1, \dots, 2003$ in $l = 1, \dots, 2004 - k$ in

$$P(X = 2004, Y = 0) = \frac{1}{2004}.$$

- a. (5) Izračunajte robno porazdelitev slučajne spremenljivke X .
- b. (10) Izračunajte $E(Y|X = k)$ za vse $k = 1, \dots, 2003, 2004$.
- c. (10) Izračunajte še $E(Y)$.

4. (25) Naj bodo X , Y in Z med sabo neodvisne slučajne spremenljivke z $X \sim \text{Geom}(1/2)$, $Y \sim \text{Geom}(1/3)$ in $Z \sim \text{Geom}(1/4)$.

- a. (10) Izračunajte rodovno funkcijo vsote $W = X + Y + Z$.
- b. (15) Pokažite, da je

$$G_W(s) = \frac{s^3}{4(1 - s/2)} - \frac{4s^3}{3(1 - 2s/3)} + \frac{9s^3}{8(1 - 3s/4)}$$

in dokažite, da je za $k = 0, 1, \dots$

$$P(W = k + 3) = \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{9}{8}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Namig: Za $|x| < 1$ je

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$