FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

3. kolokvij

18. april 2005

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, na razpolago pa imate 90 minut.

Naloga	a.	b.	c.	
1.			•	
2.			•	
3.				
4.			•	
Skupaj				

1. (25) V posodi je 7 belih in 3 rdeče kroglice. Kroglice iz posode izbiramo naključno po vrsti brez vračanja. Naj bo X število belih kroglic, preden dobimo prvo rdečo kroglico, Y pa število belih kroglic med prvo in drugo rdečo kroglico.

a. (15) Poiščite večrazsežno porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y.

Rešitev: Možne vrednosti za slučajni spremenljivki so pari (k, l), za katere velja $k \geq 0$, $l \geq 0$ in $k + l \leq 7$. Dogodek $\{X = k, Y = l\}$ se zgodi, če izberemo najprej k belih kroglic, potem rdečo, potem l belih in spet rdečo kroglico. Računamo

$$\begin{aligned}
P(X = k, Y = l) = & \\
= & \frac{7 \cdot (7-1) \cdots (7-k+1)}{10 \cdot (10-1) \cdots (10-k+1)} \cdot \frac{3}{10-k} \cdot \\
& \cdot \frac{(10-k)(10-k-1) \cdots (7-k-l+1)}{(10-k-1) \cdot (10-k-2) \cdots (10-k-l)} \cdot \frac{2}{(10-k-l-1)} \\
= & \frac{7 \cdot (7-1) \cdots (7-k-l+1) \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot (10-1) \cdots (10-k-l-1)} \\
= & \frac{7! \cdot (10-k-l-2)! \cdot 3 \cdot 2}{(7-k-l)! \cdot 10!} .
\end{aligned}$$

b. (10) Pokažite, da imata spremenljivki X in Y enako porazdelitev. Izračunajte porazdelitev Y.

Namig: Porazdelitev X izračunajte posebej, ne kot robno porazdelitev. Nato uporabite simetrijo večrazsežne porazdelitve.

Rešitev: Slučajna spremenljivka X je število belih kroglic do prve rdeče. Dogodek $\{X = k\}$ se zgodi, če dobimo najprej k belih kroglic in nato rdečo. Dobimo

$$P(X = k) = \frac{7 \cdot (7-1) \cdots (7-k+1) \cdot 3}{10 \cdot (10-1) \cdots (10-k+1) \cdot (10-k)}$$

za $k = 0, 1, \ldots, 7$. Po drugi strani dobimo porazdelitvi spremenljivk X in Y kot robni porazdelitvi dvorazsežne porazdelitve. Ker je ta porazdelitev simetrična funkcija k in l, morata biti porazdelitvi X in Y enaki. Ker poznamo porazdelitev X, poznamo tudi porazdelitev Y.

2. (25) Generatorji slučajnih števil generirajo zaporedje ničel in enk, ki jih lahko razumemo kot zaporedje med seboj neodvisnih Bernoullijevih slučajnih spremenljivk s parametrom $p = 1/2$. Predpostavimo, da je generator izpisal n slučajnih števil, nas pa zanima slučajno število pojavitev niza 111. Označimo to slučajno število z X. V nizu

$$1101111011011101111011011\,,$$

recimo, je takšnih pojavljanj 6. Označimo generirane ničle in enke z $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

a. (10) Za $k = 1, 2, \ldots, n-2$ definirajmo indikatorje

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če je } \xi_k = \xi_{k+1} = \xi_{k+2} = 1 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izračunajte $\mathrm{cov}(I_1, I_2)$, $\mathrm{cov}(I_1, I_3)$ in $\mathrm{cov}(I_1, I_4)$.

Rešitev: Za indikatorje velja

$$\mathrm{cov}(I_1, I_2) = P(I_1 = 1, I_2 = 1) - P(I_1 = 1)P(I_2 = 1)\,.$$

Verjetnost $P(I_k = 1)$ je verjetnost, da na mestih $k, k+1$ in $k+2$ dobimo enke. Zaradi neodvisnosti je ta verjetnost enaka $1/8$ za vse k. Dogodek $\{I_1 = 1, I_2 = 1\}$ se zgodi, če dobimo na začetku 4 enke zapovrstjo, torej je $P(I_1 = 1, I_2 = 1) = 1/16$. Podobno se zgodi dogodek $\{I_1 = 1, I_3 = 1\}$, če dobimo 5 enk zapovrstjo, torej je $P(I_1 = 1, I_3 = 1) = 1/32$. Sledi

$$\mathrm{cov}(I_1, I_2) = \frac{3}{64} \qquad \textit{in} \qquad \mathrm{cov}(I_1, I_3) = \frac{1}{64}\,.$$

Kovarianca $\mathrm{cov}(I_1, I_4)$ in vse ostale kovariance so zaradi neodvisnosti enake 0.

b. (15) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

Namig: Bodite skrbni pri preštevanju kovarianc in upoštevanju tega, katere kovariance so enake 0.

Rešitev: Velja $X = I_1 + I_2 + \cdots + I_{n-2}$. Po formuli je

$$\mathrm{var}(X) = \sum_{k=1}^{n-2} \mathrm{var}(I_k) + 2 \sum_{1 \le k < l \le n-2} \mathrm{cov}(I_k, I_l)\,.$$

Vemo, da so variance vse enake in enake

$$\mathrm{var}(I_1) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{64}\,.$$

V vsoti kovarianc so od 0 *različne le kovariance, za katere je* $l - k \leq 2$. *Vsoto lahko prepišemo v*

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq k < l \leq n-2} \operatorname{cov}(I_k, I_l) &= \sum_{k=1}^{n-3} \operatorname{cov}(I_k, I_{k+1}) + \sum_{k=1}^{n-4} \operatorname{cov}(I_k, I_{k+2}) \\
&= \frac{3(n-3)}{64} + \frac{(n-4)}{64} \\
&= \frac{4n-13}{64}\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$\operatorname{var}(X) = \frac{7(n-2)}{64} + \frac{8n-26}{64} = \frac{15n-40}{64}\,.$$

3. (25) V posodi imamo b belih kroglic oštevilčenih s števili $1, 2, \ldots, b$ in r rdečih kroglic oštevilčenih s števili $1, 2, \ldots, r$. Označimo $n = b + r$. Kroglice iz posode izbiramo po vrsti, naključno in brez vračanja. Naj bo X število na prvi beli kroglici, ki jo izberemo, Y pa število na prvi rdeči kroglici, ki jo izberemo.

a. (10) Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni.

   Rešitev: Ponovno branje besedila pokaže, da dobimo X tako, da si naključno izbereno stevilo me 1 in b, Y pa tako, da si naključno izberemo število med 1 in r. Slučajni spremenljivki sta neodvisni.

b. (15) Spremenimo besedilo tako, da kroglice izbiramo tako dolgo, da dobimo ali zapovrstjo belo in rdečo kroglico ali zapovrstjo rdeči in belo kroglico. Naj bo X število na beli, Y pa število na rdeči kroglici. Sta X in Y neodvisni?

   Rešitev: Velja enak razmislek kot v a. Števila na kroglicah so neodvisna.

4. (25) Naj bo $n > 1$ dano naravno število. Slučajni spremenljivki X in Y imata porazdelitev dano z

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{n(n-k)}$$

za $1 \leq k < n$ in $l \leq n - k$ in

$$P(X = n, Y = 0) = \frac{1}{n}\,.$$

a. (10) Izračunajte $E(Y|X = k)$ za $k < n$.

Rešitev: Potrebujemo verjetnost $P(X = k)$. Računamo

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{l=1}^{n-k} P(X = k, Y = l) \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} \frac{1}{n(n-k)} \\ &= \frac{1}{n}\,. \end{aligned}$$

Po definiciji je

$$\begin{aligned} E(Y|X = k) &= \sum_{l=1}^{n-k} l\, P(Y = l|X = k) \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} l\, \frac{P(X = k, Y = l)}{P(X = k)} \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} \frac{l}{n-k} \\ &= \frac{1}{n-k} \cdot \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} \\ &= \frac{n-k+1}{2}\,. \end{aligned}$$

Torej

$$E(Y|X = k) = \frac{n-k+1}{2}\,.$$

b. (15) Izračunajte še $E(Y|X = n)$ in $E(Y)$.

Rešitev: Po definiciji je $E(Y|X=n)=0$. *Vemo, da je*

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E\big(E(Y|X)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} E(Y|X=k)P(X=k) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k+1}{2} \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{m=2}^{n} m \\
&= \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right) \\
&= \frac{n^2-n-2}{2n}\,.
\end{aligned}$$