FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

3. kolokvij

18. april 2006

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, na razpolago pa imate 90 minut.

Naloga	a.	b.	c.	
1.			•	
2.			•	
3.				
4.			•	
Skupaj				

1. (25) V zavarovalništvu prihodnjo življenjsko dobo zavarovanca razumemo kot slučajno spremenljivko T z zvezno porazdelitvijo z gostoto $f_T(t)$. Ena od pogosto privzetih gostot je *Gompertzova*, dana z

$$f_T(t) = c^t \exp\left(-\frac{c^t - 1}{\log c}\right)$$

za konstanto $c > 1$ za $t \geq 0$.

a. (15) Izračunajte verjetnost $P(k \leq T < k+1)$ za celo število $k \geq 0$.

Rešitev: Izračunati je potrebno

$$\int_k^{k+1} f_T(t)\,\mathrm{d}t,$$

kar najlažje storimo z uvedbo nove spremenljivke $x = \frac{c^t-1}{\log c}$, $\mathrm{d}x = c^t\,\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} c^t \exp\left(-\frac{c^t-1}{\log c}\right)\mathrm{d}t &= \int_{(c^k-1)/\log c}^{(c^{k+1}-1)/\log c} e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= e^{-(c^k-1)/\log c} - e^{-(c^k-1)/\log c}.\end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte matematično upanje $E(c^T)$.

Rešitev: Podobno kot v točki a. računamo:

$$\begin{aligned}E[c^T] = \int_0^\infty c^t \cdot c^t \exp\left(-\frac{c^t-1}{\log c}\right)\mathrm{d}t &= \int_0^\infty (x\log c + 1)e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \log c \cdot \Gamma(2) + \Gamma(1) \\ &= \log c + 1.\end{aligned}$$

2. (25) Naj bo $X \sim \text{Bin}(n, 1/2)$. Za slučajni spremenljivki X in Y naj za $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ velja

$$P(X = k, Y = k+1) = P(X = k) \cdot \frac{n-k}{n},$$

$$P(X = k, Y = k-1) = P(X = k) \cdot \frac{k}{n}$$

in $P(X = k, Y = l) = 0$ za $|k - l| > 1$.

a. (10) Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

Rešitev: Porazdelitev Y najdemo kot robno porazdelitev. Velja

$$P(Y = l) = P(X = l+1, Y = l) + P(X = l-1, Y = l)\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
P(Y = l) &= P(X = l+1, Y = l) + P(X = l-1, Y = l) \\
&= P(X = l+1) \cdot \frac{l+1}{n} + P(X = l-1) \cdot \frac{n-l+1}{n} \\
&= \binom{n}{l+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{l+1}{n} + \binom{n}{l-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n-l+1}{n} \\
&= \binom{n-1}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \binom{n-1}{l-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \binom{n}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^n .
\end{aligned}$$

Upoštevali smo Pascalovo identiteto in interpretirali simbol $\binom{n}{m}$ kot 0, ko je $m > n$ ali $m < 0$.

b. (15) Izračunajte $\text{cov}(X, Y)$.

Rešitev: Vemo, da je $E(X) = E(Y) = n/2$. *Potrebujemo še* $E(XY)$. *Računamo*

$$
\begin{aligned}
E(XY) = & \\
= & \sum_{k=0}^{n} \left(k(k+1)P(X=k, Y=k+1) + k(k-1)P(X=k, Y=k-1)\right) \\
= & \sum_{k=0}^{n} \left(k(k+1)P(X=k)\frac{n-k}{n} + k(k-1)P(X=k)\frac{k}{n}\right) \\
= & \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \cdot P(X=k) \cdot ((k+1)(n-k) + (k-1)k) \\
= & \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \cdot P(X=k) \cdot ((k+1)n - 2k) \\
= & \frac{1}{n}\left(n \sum_{k=0}^{n} k(k+1)P(X=k) - 2\sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k)\right) \\
= & \frac{1}{n}\left(n \cdot \left(\frac{n}{4} + \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}\right) - 2\left(\frac{n}{4} + \frac{n^2}{4}\right)\right) \\
= & \frac{n^2}{4} - \frac{3n}{4} - \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Sledi

$$\operatorname{cov}(X, Y) = -\frac{3n}{4} - \frac{1}{2}\,.$$

3. (25) V matematični genetiki se pojavi naslednja naloga: vsak od $N = \alpha + \beta + \gamma$ posameznikov je tipa AA, AB ali BB (tipa AB in BA obravnavamo kot enaka). Pri tem jih je α tipa AA, β tipa AB in γ tipa BB, pri čemer tip BA obravnavamo kot AB. Ko pride do naslednje generacije, se geni vsakega od N posameznikov razbijejo na sestavna dela A in B in se povsem naključno spet sestavijo po parih. Bolj natančno, imamo $2\alpha+\beta$ genov A in $\beta+2\gamma$ genov tipa B. Vseh teh $2N$ genov se povsem naključno skombinira v N novih posameznikov s po dvema genoma.

a. (10) Označite novo nastale posameznike z številkami $1, 2, \ldots, N$. Izračunajte verjetnosti $P(\text{posameznik } k \text{ je tipa } *)$ za $* \in \{\text{AA,AB,BB}\}$.

Rešitev: Zamislimo si, da posameznik pridobi svoja gena tako, da naključno seže v škatlo z vsemi $2N$ geni in izbere dva brez vračanja. Verjetnost, da bo izbral dvakrat A je

$$P(\textit{posameznik } k \textit{ je tipa } AA) = \frac{2\alpha+\beta}{2N} \cdot \frac{2\alpha+\beta-1}{2N-1}.$$

Podobno dobimo

$$P(\textit{posameznik } k \textit{ je tipa } AB) =$$
$$= \frac{2\alpha+\beta}{2N} \cdot \frac{\beta+2\gamma}{2N-1} + \frac{\beta+2\gamma}{2N} \cdot \frac{2\alpha+\beta}{2N-1} = \frac{\beta+2\gamma}{N} \cdot \frac{2\alpha+\beta}{2N-1},$$

in

$$P(\textit{posameznik } k \textit{ je tipa } BB) = \frac{\beta+2\gamma}{2N} \cdot \frac{\beta+2\gamma-1}{2N-1}.$$

b. (15) Naj bo X število posameznikov tipa AA, ki so nastali z naključnimi kombinacijami, Y število posameznikov tipa AB in Z število posameznikov tipa BB. Izračunajte $E(X)$, $E(Y)$ in $E(Z)$.

Rešitev: Problema se lotimo z indikatorji. Definirajmo

$$I_k = \begin{cases} 1 & \textit{če je posameznik } k \textit{ tipa } AA \\ 0 & \textit{sicer} \end{cases}$$

Velja $X = I_1 + \cdots + I_N$. Poleg tega je vsak I_k Bernoullijeva slučajna spremenljivka, katere parameter smo izračunali v a. Sledi

$$E(X) = NE(I_1) = N \cdot \frac{2\alpha+\beta}{2N} \cdot \frac{2\alpha+\beta-1}{2N-1}.$$

Podobno izračunamo tudi $E(Y)$ in $E(Z)$.

4. (25) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ nenegativne celoštevilske slučajne spremenljivke, za katere velja

$$P(X_1 = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

za $k \geq 0$ in

$$P(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) = P(X_1 = k_1, \ldots, X_{n-1} = k_{n-1}) \cdot \frac{(k_{n-1})_{k_n}}{2^{k_{n-1}+k_n} \cdot k_n!},$$

kjer za poljuben a velja $(a)_0 = 1$ in $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ za $k > 0$.

a. (15) Poiščite porazdelitev vsote $X_1 + X_2$.

Rešitev: Po splošni formuli velja

$$P(X_1 = k, X_2 = l) = P(X_1 = k) \cdot \frac{(k)_l}{2^{k+l} \cdot l!} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot \frac{(k)_l}{2^{k+l} \cdot l!} = \frac{(k)_l}{2^{2k+l+1} \cdot l!}.$$

Zato je

$$P(X_1 + X_2 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{1}{2}$$

in za $n > 0$

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k, X_2 = n-k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k)_{n-k}}{2^{2k+(n-k)+1} \cdot (n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)\cdots(k+(n-k)-1)}{2^{k+n+1} \cdot (n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{2^{k+n+1} \cdot (k-1)!(n-k)!} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{3^{n-1}}{2^{2n+1}}.
\end{aligned}$$

b. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da za slučajno spremenljivko X_n velja

$$P(X_n = l) = \frac{n^{l-1}}{(1+n)^{l+1}}$$

za $l = 1, 2, \ldots$ in

$$P(X_n = 0) = \frac{n}{n+1}$$

Namig: Za $|x| < 1$ velja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k)_l x^k = \frac{l! \cdot x}{(1-x)^{l+1}} .$$

Rešitev: Trditev velja za $n = 1$. Iz splošne formule vidimo, da velja

$$P(X_{n-1} = k, X_n = l) = P(X_{n-1} = k) \cdot \frac{(k)_l}{2^{k+l} \cdot l!} .$$

Porazdelitev X_n dobimo s seštevanjem po k. Naj bo najprej $l > 0$. Ker je $P(X_{n-1} = 0, X_n = l) = 0$, velja

$$\begin{aligned}
P(X_n = l) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X_{n-1} = k, X_n = l) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(X_{n-1} = k) \cdot \frac{(k)_l}{2^{k+l} \cdot l!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k+1}} \cdot \frac{(k)_l}{2^{k+l} \cdot l!} \\
&= \frac{1}{2^l n(n-1) l!} \sum_{k=1}^{\infty} (k)_l \left(\frac{n-1}{2n}\right)^k \\
&= \frac{1}{2^l n(n-1) l!} \cdot \frac{l! \frac{n-1}{2n}}{(1 - \frac{n-1}{2n})^{l+1}} \\
&= \frac{n^{l-1}}{(n+1)^{l+1}} .
\end{aligned}$$

Ker je

$$\sum_{l=1}^{\infty} P(X_n = l) = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{1 - \frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n+1} ,$$

sledi $P(X_n = 0) = \frac{n}{n+1}$.